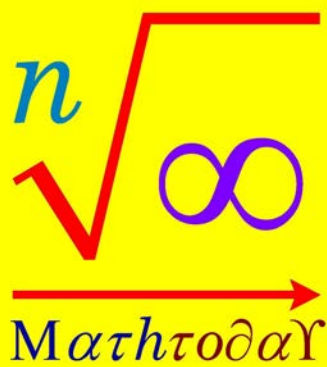


គណិតវិទ្យាថ្ងៃនេះ



សៀវភៅគណិតវិទ្យាគម្រឹគណិតវិទ្យាលំយ

គណិតវិទ្យាគម្រឹគណិតវិទ្យាលំយ

- * សង្ខេបមេរៀននិងគន្លឹះដោះស្រាយសំខាន់ៗ
- * លំហាត់ជ្រើសរើសអមដោយដំណោះស្រាយក្បោះក្បាយ
- * លំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់អិច្វីការផ្ទះ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត

អ្នករៀនរៀន

លីម ជំនួន

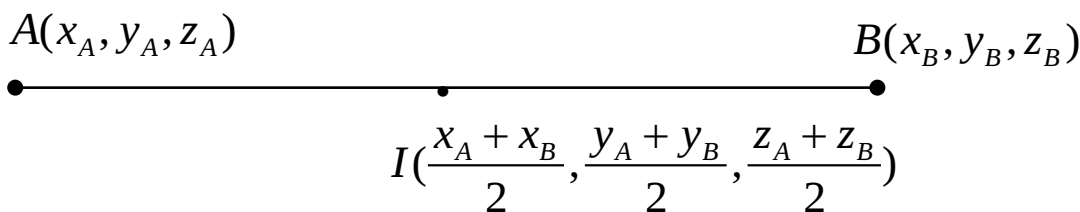
2020

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាគោលរបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

ជំពូកទី០១

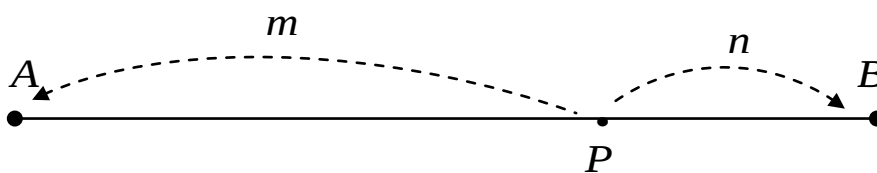
សង្ខេបមេរៀននិងរូបមន្តសំខាន់ៗ

១-កូអរដោនេនៃចំណុចកណ្តាលអង្កត់មួយក្នុងលំហ



កូអរដោនេចំណុច I កណ្តាលអង្កត់ $[AB]$: $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

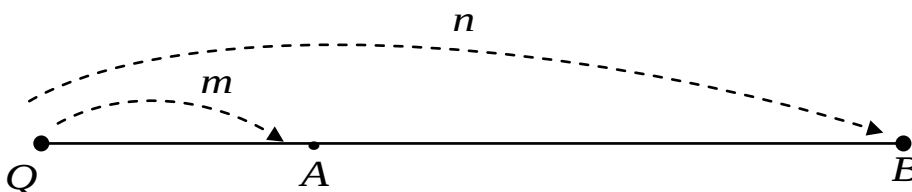
២-កូអរដោនេនៃចំណុចចែកក្នុងអង្កត់មួយក្នុងលំហ



កូអរដោនេចំណុច P ចែកក្នុងអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$

$$P \left(\frac{mx_B + nx_A}{m+n}, \frac{my_B + ny_A}{m+n}, \frac{mz_B + nz_A}{m+n} \right) \text{ ។}$$

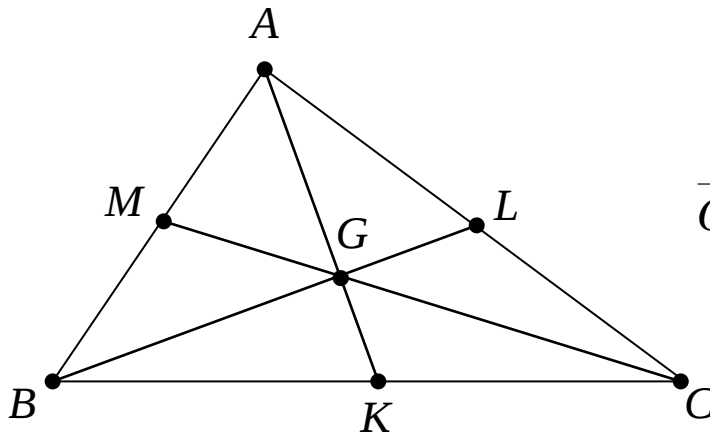
៣-កូអរដោនេនៃចំណុចចែកក្រៅអង្កត់មួយក្នុងលំហ



កូអរដោនេចំណុច Q ចែកក្រៅអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\frac{QA}{QB} = \frac{m}{n}$

$$Q \left(\frac{mx_B - nx_A}{m - n}, \frac{my_B - ny_A}{m - n}, \frac{mz_B - nz_A}{m - n} \right) \text{ ។}$$

៤-កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណមួយ

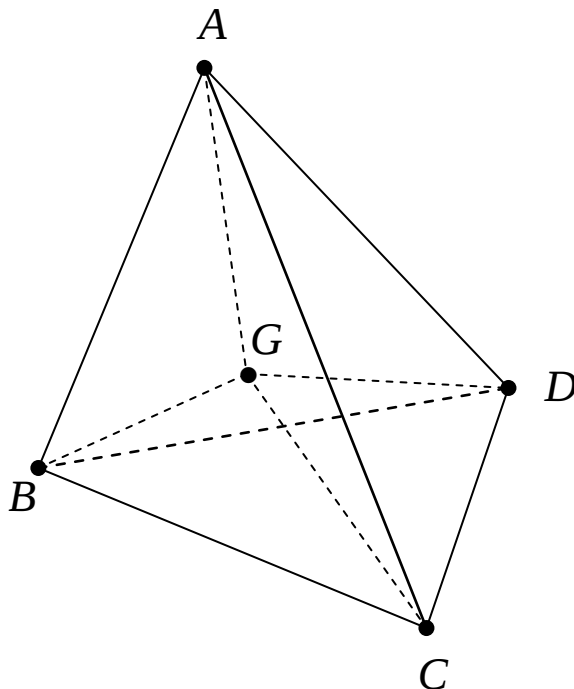


$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃត្រីកោណ ABC :

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

៥-កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃតេត្រាអិកមួយ

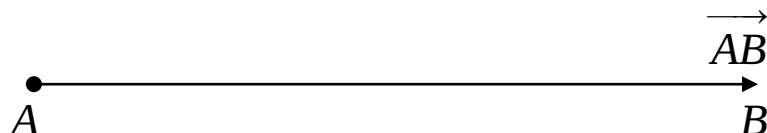


$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$:

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right)$$

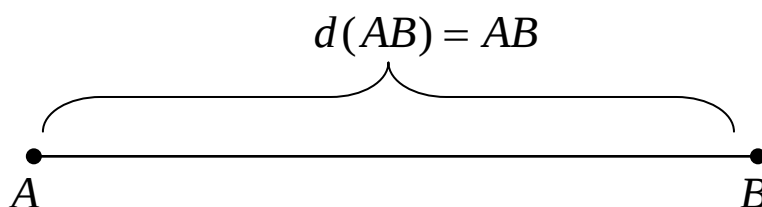
៦-កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រភ្ជាប់ដោយពីរចំណុច



កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ ដែលភ្ជាប់ដោយពីរចំណុច A និង B

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \quad \text{។}$$

៧-ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចក្នុងលំហ



ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B នៅក្នុងលំហកំណត់ដោយ ៖

$$d(AB) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad \text{។}$$

៨-ប្រមាណវិធីវ៉ិចទ័រតាមកូអរដោនេនៅក្នុងលំហ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ និង $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\text{ក) } \vec{u} = \vec{O} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ខ) } \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$$

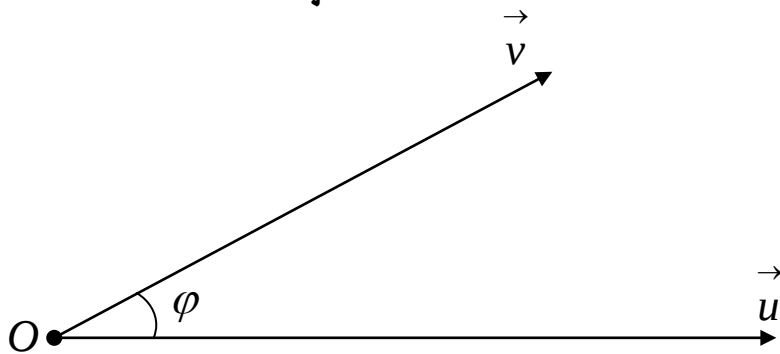
$$\text{គ) } \vec{u} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \lambda v_1 \\ u_2 = \lambda v_2 \\ u_3 = \lambda v_3 \end{cases} \quad \text{ដែល } \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall$$

$$\text{ឃ) } \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

$$\text{ង) } \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

$$\text{ច) } \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \lambda u_3 + \mu v_3) \quad \text{ដែល } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall$$

៩-ផលគុណស្កាលែរក្នុងលំហ



ផលគុណស្កាលែររវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហគឺជាចំនួនពិតកំណត់

សរសេរដោយ $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \varphi$ ដែល φ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

១០-លក្ខណៈផលគុណស្កាលែរក្នុងលំហ

$$ក) \vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$$

$$ខ) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$គ) \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$$

$$ឃ) \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$ង) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$ច) \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$ឆ) |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$ជ) |\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

១១-កន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែរក្នុងលំហ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ និង $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

ផលគុណស្កាលែររវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ ៖

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad ។$$

១២-លាម ឬ ប្រវែងវ៉ិចទ័រមួយ

បើ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ នោះ $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ ។

១៣-កូស៊ីនុសនៃមុំដោយពីរវ៉ិចទ័រ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ និង $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

បើ φ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន ៖

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \quad ។$$

១៤- វ៉ិចទ័រអត្តកូណាល់ និង វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ

ក) វ៉ិចទ័រអត្តកូណាល់

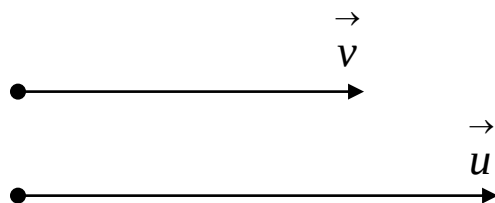


វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រអត្តកូណាល់គ្នា លុះត្រាតែ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ។

ឧបមាថា គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ និង $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

គេបាន $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$ ។

ខ) វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរគ្នា



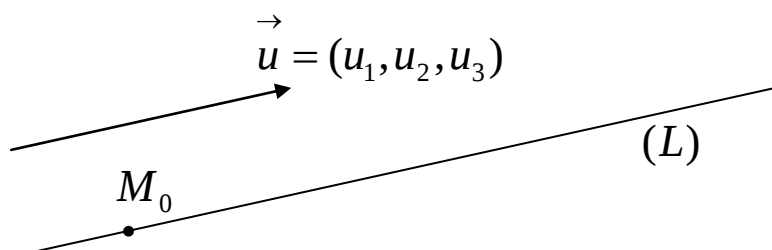
វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា លុះត្រាតែមានចំនួនពិត λ ដែល $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ។

ឧបមាថា គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ និង $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ។

$$\text{គេបាន } \vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} \quad \text{។}$$

១៥-សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះ

ក)សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ



បន្ទាត់ (L) មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ហើយកាត់តាមចំណុច

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រកំណត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

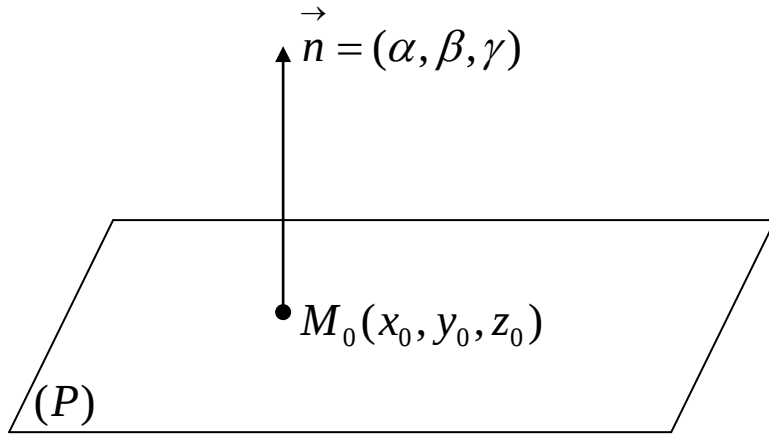
ខ)សមីការឆ្លុះ

បន្ទាត់ (L) មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ហើយកាត់តាមចំណុច

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ មានសមីការឆ្លុះកំណត់ដោយ ៖

$$(L): \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \quad \text{។}$$

១៦-សមីការប្លង់

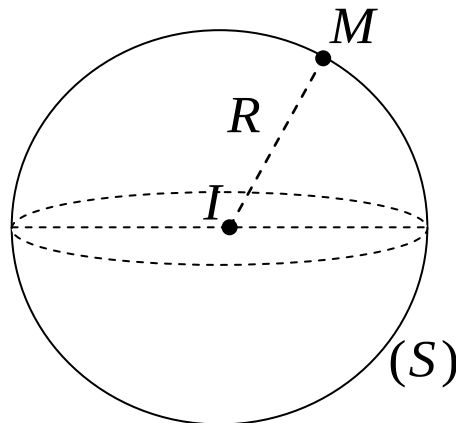


ប្លង់ (p) ដែលកាត់តាមចំណុច $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រធរម៉ាល់

$\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ កំណត់ដោយ ៖

$$(p): \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0 \quad \text{។}$$

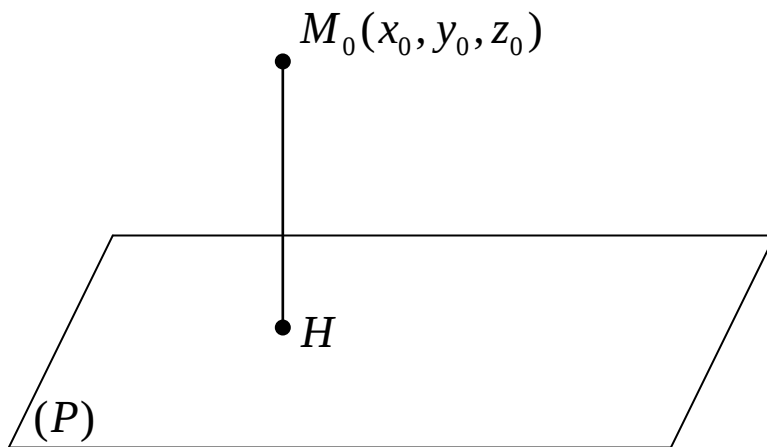
១៧-សមីការស្វ័យ



ស្វ័យ (S) មានផ្ចិត $I(a, b, c)$ កាំ R មានសមីការស្វ័យជា ៖

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad \text{។}$$

១៨-ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់



ចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ទៅប្លង់ $(p): ax + by + cz + d = 0$

$$\text{កំណត់ដោយ } d(M_0, (p)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{។}$$

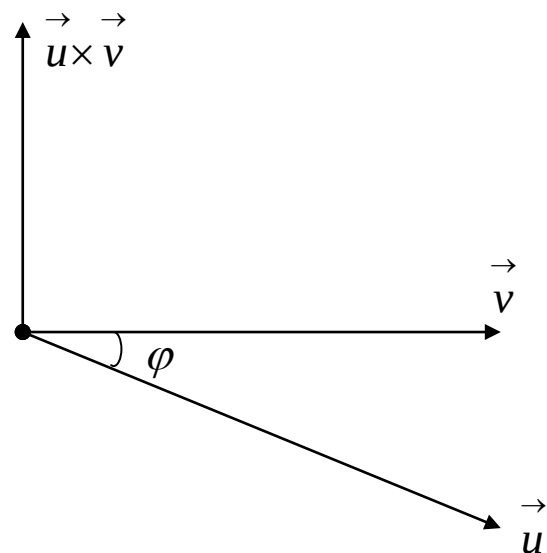
១៩-ផលគុណវ៉ិចទ័រ

និយមន័យ

ផលគុណរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

ក្នុងលំហកំណត់ដោយ ៖

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \varphi \cdot \vec{k} \quad \text{។}$$



២០-កន្សោមផលគុណវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

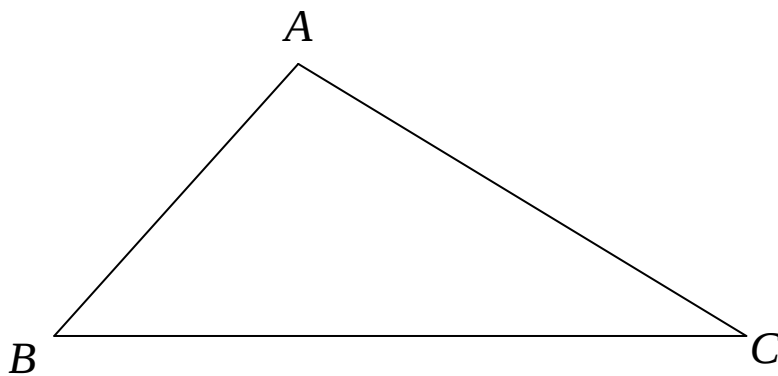
ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ និង $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ។ ផលគុណរវាងពីរវ៉ិចទ័រ

$\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ ៖

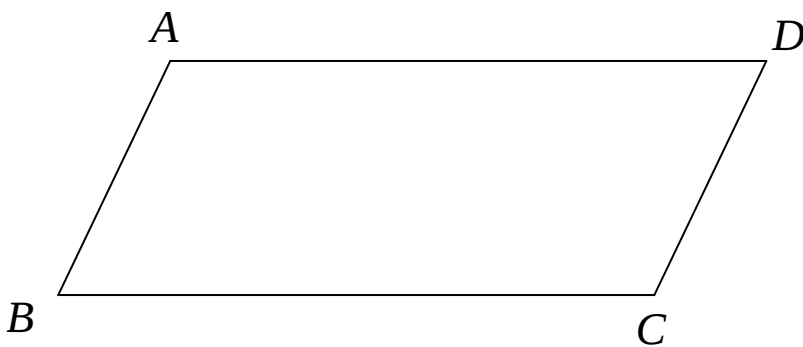
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

២១-ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ



ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC កំណត់ដោយ $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$

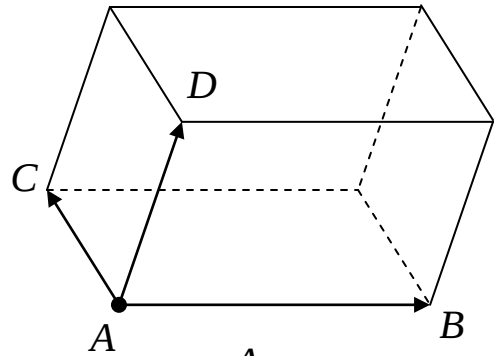
២២-ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម



ផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ កំណត់ដោយ $S_{ABCD} = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$

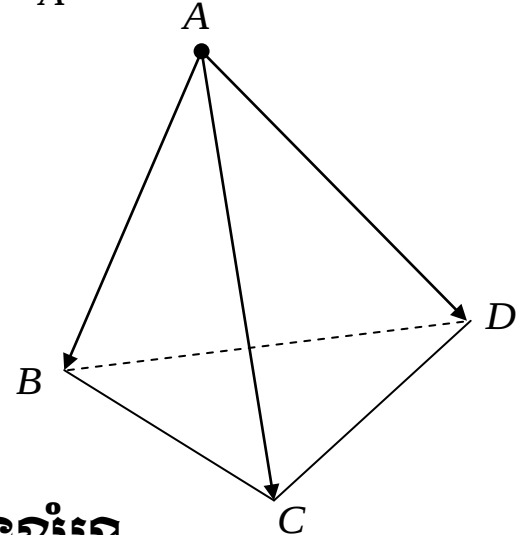
២៣-មាឌប្រលេពីប៉ែត

មាឌនៃប្រលេពីប៉ែត $V = \left| (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} \right|$

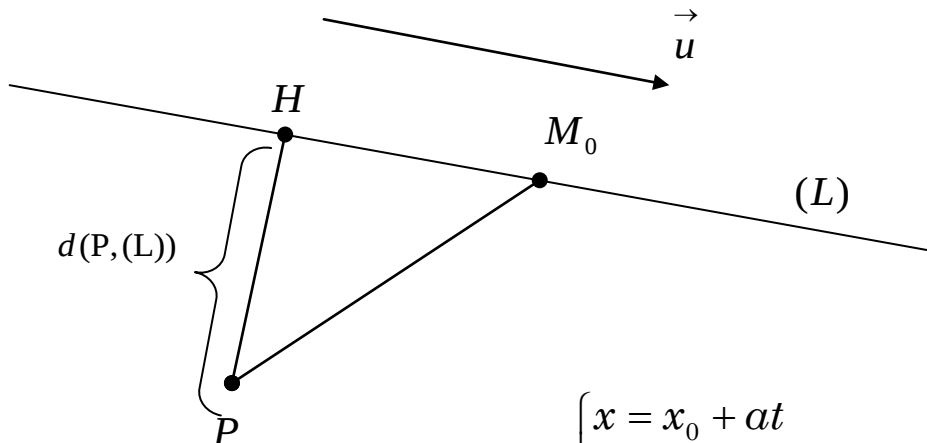


២៤-មាឌតេត្រាអែត

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} \right|$$



២៥-ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ



ចម្ងាយពីចំណុច $P(\alpha, \beta, \gamma)$ ទៅបន្ទាត់ (L) :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

កំណត់ដោយ $d(P, (L)) = \frac{|\vec{M_0P} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ ដែល $\vec{u} = (a, b, c), M_0(x_0, y_0, z_0)$ ។

ជំពូកទី០២

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

លំហាត់ទី០១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1, -2, 1), B(-1, 0, 2), C(3, 4, 4)$ និង $D(5, 2, 5)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{DB}$ ។

២.គណនារង្វាស់ទ្រនុងទាំងអស់របស់តេត្រាអែត $ABCD$ ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ ។

៤.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ។

៥.រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ។

លំហាត់ទី០២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច ៖

$A(1, 4, -5), B(-1, 6, -4), C(3, -2, 4)$ និង $D(5, -4, 3)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនារង្វាស់ជ្រុងនិងអង្កត់ទ្រូងរបស់ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ ។

៤. I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AD]$ ហើយ $K \in [BC]$ ដែល $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I និង K រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា IK ។

៥. គណនាផលគុណស្កាលែន $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$ និង $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KD}$ ។

លំហាត់ទី០៣

នៅក្នុងតម្រុយអក្សរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(2, -3, 1)$, $B(3, 5, 5)$, $C(6, -7, 8)$ និង $D(10, -2, -3)$ ។

១. គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

២. គណនា $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

៣. ស្រាយថា BCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

៤. រកកូអរដោនេនៃចំណុច E ដោយដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ ។

៥. ចូរស្រាយថា $(AE) \perp (BCD)$ ។

លំហាត់ទី០៤

ក្នុងតម្រុយអក្សរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យត្រីកោណ ABC

មានកំពូល $A(-2, 3, -4)$, $B(4, 9, -1)$ និង $C(2, -5, 4)$ ។

១. គណនា AB, AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

២. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(AB), (AC)$ និង (BC) ។

៣. រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដោយដឹងថា $BC \cdot \overrightarrow{IA} + AC \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ។

៤. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $BC \cdot IA^2 + AC \cdot IB^2 + AB \cdot IC^2 = BC \cdot AC \cdot AB$ ។

៥. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ ។

លំហាត់ទី០៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យពីរចំណុច ៖

$A(2, -3, 1)$ និង $B(6, 9, 7)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេ I កណ្តាលអង្កត់ $[AB]$ រួចគណនាប្រវែង AB ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ី (S) មានអង្កត់ធ្នឹត AB ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) និងសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ $[AB]$ ។

៤.គេឲ្យចំណុច $C(1, 1, -2)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $C \in (S)$ រួចសរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ី (S) ត្រង់ចំណុច C ។

៥. D ជាចំណុចមួយដែល $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច D រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $CADB$ ។

លំហាត់ទី០៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច A មាន

កូអរដោនេ $(3, 1, 1)$ និងប្លង់ (P) មានសមីការ $2x - y - 2z + 6 = 0$ ។

១.គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (P) ។

២. H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A លើប្លង់ (P) ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ី (S) មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាម A ។

៣. B ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x_b = 0$ ហើយ $B \in (P)$ និង $B \in (S)$ ។

ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B ។

៤. C ជាចំណុចមានអរដេនេ $y_c = 0$ ហើយ $C \in (P)$ និង $C \in (S)$ ។

ចូរគណនាកូអរដេនេនៃចំណុច C ។

៥. គេឲ្យចំណុច $D(3, 4, 4)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $D \in (P)$ និង $D \in (S)$ ។

ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច D ដោយដឹងថា $(L) \subset (P)$ ។

លំហាត់ទី០៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

សមីការឆ្លុះ $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = z-2$ និងចំណុច $A(2, -1, 3)$ ។

H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A ទៅលើបន្ទាត់ (L) ។

១. គណនាកូអរដេនេនៃចំណុច H រួចគណនាប្រវែង AH ។

២. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាមចំណុច A ។

៣. គណនាកូអរដេនេនៃចំណុច B និង C ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងស្វ៊ែរ (S) ។

៤. P ជាចំណុចមួយផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ។ គណនាកូអរដេនេនៃ P ។

៥. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P \in (S)$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ $PBAC$ ។

លំហាត់ទី០៨

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យស្វ៊ែរ (S) មាន

សមីការ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ និងចំណុច $P(-1, 5, 7)$ ។

១. គណនាកូអរដេនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ៊ែរ (S) រួចគណនា IP ។

២.បន្ទាត់(IP)ប្រសព្វស្វ័យ(S) ត្រង់ចំណុច A និង B ដែល A នៅចន្លោះចំណុច I និង P ។ គណនា PA និង PB ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។

៤.រកសំណុំនៃចំណុច M ស្ថិតនៅលើស្វ័យ(S)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $PM^2 = PA.PB$ ។

លំហាត់ទី០៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(0; -3; -4)$; $B(2, 1, 8)$; $C(2; 4; 5)$ និង $D(4; -2, -3)$ ។ M និង N ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់រៀងគ្នា (AB) និង (CD) ។

កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M និង N ដើម្បីឲ្យអង្កត់ MN មានប្រវែងខ្លីបំផុត រួចកំណត់ប្រវែងខ្លីបំផុតនោះ ។

លំហាត់ទី១០

ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(-1, 2, 3)$, $B(0, -1, 1)$ និង $C(2, 3, 5)$ ។

១.ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច B និង C ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H រវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយប្លង់ (P) ។

៣.រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ $\triangle ABC$ ។

លំហាត់ទី១១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

$$\text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិក}(L): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 6 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{និងប្លង់}(P): 2x + 2y + z - 9 = 0$$

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

២. M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 3$ និងស្ថិតនៅលើ (L) ហើយ H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើប្លង់ (P) ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M និង H ។

៣. គេសង់ប្លង់ (Q) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ M ហើយគេតាង (d) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។ សរសេរសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិកបន្ទាត់ (d) ។

៤. គេគូសបន្ទាត់ (AH) ប្រសព្វប្លង់ (Q) ត្រង់ K ។ ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិកនៃបន្ទាត់ (AH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច K ។

៥. គណនា MA និង MK រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ AMK ។

លំហាត់ទី១២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

$$\text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិក}(L): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{និងប្លង់}(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$$

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

២. គេសង់ប្លង់ (Q) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ A និងសង់បន្ទាត់ (d) កែងនឹងប្លង់ (P)

ត្រង់ចំណុច A ដែរ។ ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (d) ។

៣. M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 0$ និងស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (d) ហើយ H និង K

ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (Q) រៀងគ្នា។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M, H និង K ។

៤. ចូរស្រាយថាបួនចំណុច M, H, A, K ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

៥. ចូរស្រាយថាចតុកោណ $MHAK$ ជាការេ។

លំហាត់ទី១៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

$$\text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ}(L): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - t \\ z = 9 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{និងប្លង់}(P): 2x + y - 2z - 6 = 0$$

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

២. គេឲ្យ $B(5, 6, 5)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B \in (P)$ ។

៣. ពីចំណុច B គេគូសបន្ទាត់ (BH) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ដោយ $H \in (L)$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BH) ។

៤. គេយក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I រួច

ទាញបង្ហាញថា $\overline{IH}$ ជារ៉ឺឌ័រនៃប្លង់ (P) ។

៥. K ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃចំណុច H ធៀបនឹងប្លង់ (P) ។ គណនាកូអរដោនេនៃ K

រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាចតុកោណ $AHBK$ ជាការេ។

លំហាត់ទី១៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1, 2, 3), B(3, 6, -1), C(4, 3, 3)$ និង $D(2, 1, 1)$ ។

១. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដារនៃផ្ទៃ (S) មានអង្កត់ធ្នឹត $[AB]$ ។

២. បង្ហាញថា $C \in (S)$ និង $D \in (S)$ ។ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (CD) ។

៣. សរសេរសមីការប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាមចំណុចរៀងគ្នា C និង D ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

៤. ចូរបង្ហាញថាបួនចំណុច A, B, C, D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

៥. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

លំហាត់ទី១៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(3, -4, -2), B(1, 0, -5), C(5, -2, -5)$ និង $D(4, -2, 0)$ ។

១. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A, B, C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

២. គណនា $\overrightarrow{AD}$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ។ គណនារង្វាស់ AD រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

៣. គណនា $\overrightarrow{OB}$ និង $\overrightarrow{DC}$ រួចទាញថា $OBCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៤. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) គូសចេញពី

គល់ O ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ H ។

៥.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចបង្ហាញថា $AHBC$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

លំហាត់ទី១៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(2, -3, 4), B(3, 1, 3), C(-1, 0, 4)$ និងប្លង់ $(P): x - 2y + 2z - 7 = 0$ ។

១.គណនា AB, AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

២.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B \in (P)$ និង $C \in (P)$ ។សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (BC) ។

៣. H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) ។គណនាកូអរដោនេនៃ H ។

៤.គេតាង $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$, $\vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$ និង $\vec{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$ ។

ចូរស្រាយថា $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន។

៥.ចូរសរសេរសមីការប្លង់ $(HAB), (HAC)$ និង (HBC) ។

លំហាត់ទី១៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$S(3, 4, 4), A(2, 6, 2), B(-1, 3, 5)$ និង $C(3, 1, 1)$ ។

១.គណនា AB, AC, SB និង SC រួចទាញរកប្រភេទត្រីកោណ ABC & SBC ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែន $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$ ។

៣.ស្រាយបញ្ជាក់ថាប្លង់ (P) កាត់តាម S ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{SA}$ មានសមីការ

$$x - 2y + 2z - 3 = 0 \quad \text{។}$$

៤.តាង I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I ។

សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ(Q)នៃអង្កត់ $[BC]$ ។

៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $A \in (Q)$ និង $S \in (Q)$ ។ គណនាផ្ទៃសម្ព័ន្ធ $\angle SIA$ ។

លំហាត់ទី១៨

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(2,3,-1), B(-1,0,-1), C(5,3,5)$ និង $D(8,6,5)$ ។

១.គណនា $\overline{AD}$ និង $\overline{BC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(BC) និង (CD) ។

៣. H ជាចំណោលកែងនៃ A លើ BC ហើយ K ជាចំណោលកែងនៃ H លើ CD ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K ។

៤.គណនា AH និង BC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $ABCD$ ។

៥.ចូរស្រាយថា KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាត។

៦.រកកូអរដោនេនៃចំណុច L ដោយដឹងថា $HKCL$ ជាការេ។

តើចំណុច B, L, D រត់ត្រង់គ្នាឬទេ ?

លំហាត់ទី១៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(-4,1,-2), B(-1,7,4)$ និង $C(4,-7,2)$ ។

១.គណនា AB, AC និង BC រួចទាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង។

២.កំណត់សមីការប្លង់(ABC) ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $BC.\overrightarrow{IA} + AC.\overrightarrow{IB} + AB.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O}$

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(IA),(IB),(IC) ។

៥.គេឲ្យចំណុច $M(x,y,z)$ នៃលំហ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$BC.MA^2 + AC.MB^2 + AB.MC^2 = (BC + AC + AB)MI^2 + BC.AC.AB$$

លំហាត់ទី២០

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(1,-1,-3)$, $B(2,-3,-1)$ និង $C(4,1,3)$ ។

១.គណនា AB, AC និង BC ។

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I កណ្តាលអង្កត់ $[BC]$ រួចសរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ
នៃអង្កត់ $[BC]$ ។

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (ID) ។

៥.សរសេរសមីការស្វ៊ែរ(S) មានផ្ចិត I និងកាំ $r = AB$ ។

លំហាត់ទី២១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេឲ្យពីរចំណុច

$A(1,1,0)$ និង $B(3,-3,4)$ ។

១.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ(P) នៃអង្កត់ $[AB]$ ។

- ២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែរ(S)មានអង្កត់ផ្ចិត AB ។
- ៣.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $O \in (S)$ (O ជាគល់នៃតម្រុយអរតូនរម៉ាល់)។
សរសេរសមីការប្លង់(Q) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ(S) ត្រង់ O ។
- ៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(P)និង(Q) ។

លំហាត់ទី២២

- នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច
- $A(1,1,1)$, $B(2,-3,4)$ និង $C(3,-4,-2)$ ។
- ១.រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដោយដឹងថា $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ។
 - ២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែរ(S)មានផ្ចិត O និងកាំ OG ។
 - ៣.សរសេរសមីការប្លង់(P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ(S) ត្រង់ G ។
 - ៤.សរសេរសមីការប្លង់(Q) កាត់តាម G ហើយកែងនឹង $\vec{n} = (9,3,1)$ ។
 - ៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាបីចំណុច A, B, C ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។
 - ៦.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង(Q) ។

លំហាត់ទី២៣

- នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច
- $A(1,-2,-4)$, $B(-1,-4,-3)$, $C(3,4,5)$ និង $D(7,-7,-2)$ ។
- ១.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ ។
 - ២.គណនាជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

៣.ស្រាយថាប្លង់(ABC) មានសមីការ $6x - 5y + 2z - 8 = 0$ ។

៤.យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I រួច
សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(ID) ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ(Q) នៃអង្កត់ $[BC]$ ។

៥.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង(Q) ។

លំហាត់ទី២៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យពីរចំណុច

$A(-4, 1, 3)$ និង $B(2, 3, -1)$ និងប្លង់(P): $x + 2y - 2z - 1 = 0$ ។

១.ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AB) ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(AB)និងប្លង់(P)រួច
បង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

៣. H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច B លើប្លង់(P) ។ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ
នៃបន្ទាត់(BH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ។

៤. K ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់(BH) ។ បង្ហាញថា MH ជាបាតមធ្យម
នៃត្រីកោណ ABK រួចទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច K ។

៥. L ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់(P)។បង្ហាញថា $ALHK$ ជាចតុកោណកែង
រួចទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច L ។

លំហាត់ទី២៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ ៖

$$(L_1): \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{2} \quad \text{និង} \quad (L_2): \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3 \\ z = -1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

២. A និង B ជាពីរចំណុចស្ថិតលើបន្ទាត់ (L_2) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា

$$x_a = -1 \quad \text{និង} \quad x_b = 5 \quad \text{។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច } A \text{ និង } B \text{ ។}$$

៣. H និង K ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A និង B ទៅលើបន្ទាត់ (L_1)

រៀងគ្នា ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K ។

៤.គណនា $\overline{AK}$ និង $\overline{HB}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $AHBK$ ។

៥.គណនា AH និង HK រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $AHBK$ ។

លំហាត់ទី២៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច៖

$$A(1,1,1), B(2,3,3), C(6,-1,5) \quad \text{និង} \quad D\left(6, -4, \frac{7}{2}\right) \text{ ។}$$

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}$ និង $\overline{CD}$ ។

២.បង្ហាញថា $\overline{AD} // \overline{BC}$ និង $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

៣.គណនា $\overline{AC} \cdot \overline{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ACD ។

៤. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច C លើ $[AD]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃ H ។

៥. គណនា AB , BC និង AD រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABCD$ ។

លំហាត់ទី២៧

នៅក្នុងតម្រុយអត្ថន័យម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(4, 1, 4), B(3, 5, 5), C(3, -1, 2)$ និង $D\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$ ។

១. គណនា $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ និង $\overline{AD} \cdot \overline{DC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

២. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។

៣. M ជាចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (AD) ដោយដឹងថាចំណុច M មានអាប់ស៊ីស

$x_m = 1$ ។ ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ។

៤. គណនា $\overline{MB} \cdot \overline{MC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ MBC ។

៥. គណនា MB និង MC រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MBC ។

លំហាត់ទី២៨

ក្នុងតម្រុយអត្ថន័យម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យស្វ៊ែរ (S) សមីការ

$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ និងបន្ទាត់ $(L): \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -7 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (L) និងស្វ៊ែរ (S) ។

(គេដឹងថាចំណុច A មានអាប់ស៊ីសអវិជ្ជមាន) ។

- ២.សរសេរសមីការប្លង់(P) និង (Q) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែរ(S)រៀងគ្នាត្រង់ A និង B ។
- ៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(P) និង (Q) ។
- ៤.សរសេរសមីការប្លង់(π) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់(d) ។
- ៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B \in (\pi)$ រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់(π) ត្រង់ B ។

លំហាត់ទី២៩

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យស្វ៊ែរ(S)សមីការ

$$(x+5)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36 \text{ និងបន្ទាត់}(L): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- ១.គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ៊ែរ(S) ។
- ២.យក H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច I លើបន្ទាត់(L) ។
គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងរង្វាស់ IH រួចទាញថាបន្ទាត់(L) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែរ(S) ត្រង់ចំណុច H ។
៣. A និង B ជាចំណុចពីរស្ថិតនៅលើបន្ទាត់(L) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $x_a = -5$ និង $x_b = 5$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។
- ៤.គណនា AB , IA និង IB រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ IAB ។
- ៥.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IAB ។
- ៦.សរសេរសមីការប្លង់(IAB)និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(IA), (IB), (IH)

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យប្លង់ពីរ $(\alpha) : x + 2y + 2z - 11 = 0$, $(\beta) : 2x - 2y + z - 1 = 0$

និងបន្ទាត់ $(\Delta) : x = 3 + t, y = 6 - 4t, z = 7 - t$ ដែល $t \in \mathbb{R}$

១.គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (Δ) ជាមួយប្លង់

(α) និង (β) រៀងគ្នា ។

២.យក C ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 1$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (α) និង (β) ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកប្រភេទនៃ ΔABC ។

៣.កំណត់សមីការស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់

(α) និង (β) ។

លំហាត់ទី៣១

ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេឲ្យប្លង់ $(p) : x - 2y + 2z - 6 = 0$ និងបន្ទាត់ $(L) : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{-2}$ ។

១.ចូរបង្ហាញថា $(L) \perp (p)$ រួចគណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់

(L) ជាមួយប្លង់ (p) ។

២.តាង A, B, C ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (p) ជាមួយអ័ក្ស $(ox), (oy), (oz)$ រៀងគ្នា។

ចូរគណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៣.គណនាកូអរដោនេចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

លំហាត់ទី៣២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} \quad \text{និង} \quad \vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \quad \text{។}$$

១.គណនា $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ និង $|\vec{n}|$ ។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (p) កាត់តាមចំណុច $A(-1, 2, -3)$ ហើយកែងនឹង $\vec{n}$ ។

៣.កំណត់សមីការស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត O ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (p) ។

លំហាត់ទី៣៣

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$$A(1, 2, 3); B(2, 3, -6); C(-2, 1, -2) \quad \text{និង} \quad D(0, 4, 0) \quad \text{។}$$

១.ចូរគណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$ រួចទាញថាបីចំណុច B, C, D មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គណនាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ BCD រួចកំណត់សមីការប្លង់ (BCD) ។

២.គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពី A ទៅប្លង់ (BCD) ។

៣. H ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់បាត (BCD) ។

កំណត់សមីការបន្ទាត់ (AH) រួចរកកូអរដោនេ H ។

លំហាត់ទី៣៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយគេឲ្យមាន

ចំណុច $A(0, 2, 1), B(2, 1, -1), C(-4, 5, 3)$ និង $D(4, 6, 3)$ ។

១. ចូរស្រាយថា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

២. កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

៣. គណនា $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $ABCD$ ។

៤. ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

លំហាត់ទី៣៥

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច

$A(0,0,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

១. បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

៣. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កែងទៅនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D ។

៤. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD})$ ។

៥. គណនាមាឌរបស់ពីរ៉ាមីតដែលមានកំពស់ $[AE]$ និងបាតជាចតុកោណ $ABCD$ ។

លំហាត់ទី៣៦

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានបួនចំណុច៖

$A(4,0,0)$ $B(0,-2,0)$, $C(0,0,2)$ និង $D(4,2,2)$ ។

១. បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

២. ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និងសមីការនៃប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A, B និង C ។
៣. យក H ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BC) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។
៤. គេមានចំណុច $S(1, 6, -6)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$ រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ។

លំហាត់ទី៣៧

- នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យប្លង់ $(P): x + 2y + 2z - 4 = 0$ ។ តាង A, B និង C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយអ័ក្ស (ox) , (oy) និង (oz) រៀងគ្នា ។
១. ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A, B និង C រួចសង់ចំណុចនេះ។
២. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$ ។
៣. គណនាផលគុណស្កាលែន $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO}$ ។ ទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$
៤. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរ (S) ចារឹកក្រៅចតុមុខ $OABC$ រួចបញ្ជាក់កូអរដោនេផ្ចិត និងកាំរបស់ស្វ៊ែរ (S) ផង។

លំហាត់ទី៣៨

- ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1, 2, 3)$ និងប្លង់ $(\alpha): x + 2y - 2z - 8 = 0$ ។

- ១.កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) គូសចេញពីចំណុច A ហើយកែងនឹងប្លង់ (β) ត្រង់ចំណុច H ។
- ២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹង (α) ។
- ៣.កំណត់សមីការប្លង់ (β) កាត់តាមចំណុច A' ហើយស្របនឹងប្លង់ (α) ។

លំហាត់ទី៣៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យពីរចំណុច $A(1, -2, 2)$ និង $B(2, 2, 1)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $|\overrightarrow{OA}|$ និង $|\overrightarrow{OB}|$ រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ OAB និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔABC ។

២.ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជាកំពូលនៃការេ $OACB$ ។

៣.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔCAB

៤.ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB) ។

៥.គេឲ្យចំណុច $S(-1, 5, 1)$ ។គណនាមាឌតេត្រាអែត $SABC$ ។

លំហាត់ទី៤០

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1, 1, -1), B(4, -1, -3), C(-2, 5, 2)$ និង $D(3, 2, 7)$ ។

១.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A, B, C មិននៅត្រង់គ្នា។

២.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) គូសចេញពី D

ហើយកែងនិងប្លង់ (ABC) ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (ABC) ។

៥.កំណត់មាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

លំហាត់ទី៤១

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេឲ្យប្លង់ $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ និងចំណុច $A(2, 4, 1)$ និង $B(-2, 8, 3)$ ។

(Q) ជាប្លង់កាត់តាមពីរចំណុច A និង B ហើយកែងនិងប្លង់ (P) ។ (L) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ។

១.ចូររកសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ។

២. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច A លើបន្ទាត់ (L) ហើយ A' ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃ A ធៀបនឹងបន្ទាត់ (L) ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង A' ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច M ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L) ដោយដឹងថាផលបូក $AM + BM$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យប្លង់ $(p): x + 2y - 2z + 1 = 0$ និងចំណុចពីរ $A(2, 4, 1)$ និង $B(6, 0, -1)$

ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច M ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (p) ដោយដឹងថា $MA + MB$

មានតម្លៃអប្បបរមា ។

លំហាត់ទី៤៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(2, 4, -5), B(6, -4, 3), C(-1, 1, 7)$ និង $D(-4, 7, 1)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{AD}$ រួចគណនា

រង្វាស់នៃជ្រុងនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

២.ចូរបង្ហាញថា $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទ

នៃចតុកោណ $ABCD$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

៣.តាង E ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។ គណនា EC និង ED ។

៤.គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC និង ACD ។

៥.រកសមីការនៃប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។

លំហាត់ទី៤៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់និងស្វ៊ែរមានសមីការ

$(L): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{2}$ និង $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយរួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ខាងលើ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១ ។លំហមានទិសដៅតាម

តម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ គេតាង

I, J, K ជាបីចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ ។

១.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I, J, K ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IKJ ។

៣.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK ។

៤. L ជាចំណុចមួយនៃ $[GH]$ ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LJ}$ អប្បបរមា។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L ។

៥.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ K, L និង M ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ $[EF], [CD]$ និង $[DH]$ ។

១) គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML}$ រួចទាញរកឈ្មោះនៃ ΔKLM

២) P ជាចំណុចមួយនៃ $[EH]$ ហើយគេតាង $\angle KPL = \varphi$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ទីតាំងនៃ P ប្រែប្រួលក្នុង $[EH]$ គេមាន $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ។

តើពេលណាទើបគេបាន $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ 1 ។ លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយ

អត្តនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ យក I, J, K និង L ជាចំណុច

កណ្តាលរៀងគ្នា នៃ $[EF], [BC], [DH]$ និង $[BF]$ ។

១.ចូរស្រាយបំភ្លឺថា IJK ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔIJK ។

៣.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (IJ) និង (KL) អត្តកូណាល់គ្នា។

៤.គណនាផ្ទៃសម្ព័ន្ធ $\angle ILJ$ ។

៥.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{JK}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ILK និងត្រីកោណ JLK ។

៦.គណនា $(\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}) \cdot \overrightarrow{IL}$ រួចទាញថាចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

លំហាត់ទី៤៨

គូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១ ។ លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយ

អត្តនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ គេតាង I, J, K

ជាបីចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CG}$ ។

១.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I, J, K ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK

៣.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK

៤. L ជាចំណុចមួយនៃ $[GH]$ ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LJ}$ អប្បបរមា។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L ។

៥.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មានទ្រនុងស្មើនឹង $1cm$ ។ I ជាចំណុចកណ្តាល

នៃទ្រនុង $[EH]$, K ជាផ្ចិតកាត់ $CDHG$ ហើយ M និង N ជាចំណុចពីរ

នៃទ្រនុង $[BC]$ និង $[BF]$ រៀងគ្នាដោយដឹងថា $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MK}$ និង $\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{NK}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។ តើបួនចំណុច I, K, M, N ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយឬទេ? បើសិនជាវាមិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយទេចូរគណនាមាឌតេត្រាអ៊ែតដែលមានកំពូល I, K, M, N ។

លំហាត់ទី៥០

គេឲ្យគូប $ABCD$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ I ជាចំណុចកណ្តាល $[EF]$

$J \in [BC]$ ដែល $IJ \perp IH$ ហើយ $K \in [CD]$ ដែល $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{8} \overrightarrow{CD}$ ។

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបួនចំណុច H, I, J, K ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

២. រកទីតាំងនៃចំណុច $P \in [DH]$ ដោយដឹងថា $\overrightarrow{PI} \cdot \overrightarrow{PJ}$ មានតម្លៃតូចបំផុត។

លំហាត់ទី៥១

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ I ជាចំណុចកណ្តាល

នៃទ្រនុង $[BF]$ ហើយ $K \in [BC]$ និង $J \in [DH]$ ដោយដឹងថា ៖

$$\overrightarrow{BK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BC} \text{ និង } \overrightarrow{DJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{DH} \text{ ។}$$

១. ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK ។

២. P និង Q ជាពីរចំណុចស្ថិតលើ $[IJ]$ ដោយដឹងថា $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{PH}$ និង $\overrightarrow{QE} \cdot \overrightarrow{QG}$

មានតម្លៃអប្បបរមា ។ ចូរស្រាយថា $P \equiv Q$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ M ជាចំណុចកណ្តាល

នៃទ្រនុង $[BF]$ ។ $P \in [CD]$ ដែល $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CD}$ និង $Q \in [DH]$ ដែល

$$\overrightarrow{DQ} = \frac{3}{8} \overrightarrow{DH} \text{ ។}$$

១. ចូរស្រាយថា MPE និង MPQ សុទ្ធតែជាត្រីកោណកែង ។
២. ចូរស្រាយថាបួនចំណុច M, P, Q, E ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។
៣. កំណត់ប្រភេទនៃចតុកោណ $MPQE$ ។
៤. តាង S ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (MP) និង (EQ) ហើយយក $\angle ESM = \varphi$ ។
ចូរគណនាតម្លៃ $\tan \varphi$ ។

លំហាត់ទី៥៣

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ M, N, P និង Q ជាបួនចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overline{BM} = \frac{2}{3} \overline{MF}$, $\overline{BN} = \frac{1}{3} \overline{BC}$, $\overline{DP} = \frac{1}{3} \overline{DH}$ និង $\overline{EQ} = \frac{1}{3} \overline{EH}$ ។

១. ចូរស្រាយថាបួនចំណុច M, N, P និង Q មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។
២. រកប្រភេទនៃត្រីកោណ MNP និង MQP ។
៣. គេតាង I ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (MPQ) និងបន្ទាត់ (BC) ហើយ J ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (MNP) និងបន្ទាត់ (EH) ។
រកប្រភេទនៃត្រីកោណ MIP និង ត្រីកោណ MJP ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ K ជាផ្ចិតកាត់ $AEFB$ ហើយ L ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ ។

១. ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណ HKL ។

២. $M \in [HD]$ ដែល $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML}$ មានតម្លៃអប្បបរមាហើយ $P \in [BF]$ ដែល $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{DM}$ ។ ចូរស្រាយថាបួនចំណុច P, K, M, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១ ។ លំហមានទិសដៅតាម

តម្រុយអត្តនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ គេតាង I, J, K

ជាបីចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ ។

១. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I, J, K ។

២. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK ។

៣. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK ។

៤. L ជាចំណុចមួយនៃ $[GH]$ ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LJ}$ អប្បបរមា។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L ។

៥. ចូរស្រាយថាបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១ ។ លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយ

អត្តនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ គេយក I ជាចំណុចកណ្តាល

នៃ $[AB]$ ហើយ J ជាចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$ ។

១. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ CIJ ។

២. K ជាចំណុចមួយនៃ $[DH]$ ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ}$ អប្បបរមា។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច K ។

៣. ចូរស្រាយថាបួនចំណុច C, I, J, K បង្កើតបានជាតេត្រាអ៊ែតមួយរួចគណនា
មាឌនៃតេត្រាអ៊ែតនេះ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១ ។ ក្នុងលំហមានទិសដៅតាម

តម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ គេយក I ជាចំណុច
កណ្តាលនៃ $[BC]$ និង K ជាផ្ចិតកាត $AEFB$ ។

១. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KH}$ រួចទាញថា IKH ជាត្រីកោណកែង។

២. ស្រាយថា $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KH} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AF}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle IKH$ ។

៣. គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $AKIH$ រួចទាញរកចម្ងាយពី A ទៅប្លង់ (IKH) ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១ ។ លំហមានទិសដៅតាម

តម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ យក I, J, K

និង L ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នា នៃ $[EF], [BC], [DH]$ និង $[BF]$ ។

១. ចូរស្រាយបំភ្លឺថា IJK ជាត្រីកោណសមង្វ័ន។

២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle IJK$ ។

៣. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (IJ) និង (KL) អនុគូណាល់គ្នា។

៤. គណនាផ្ទៃសម្ព័ន្ធ $\angle ILJ$ ។

៥. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{JK}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃ ត្រីកោណ ILK និងត្រីកោណ JLK ។

៦. គណនា $(\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}) \cdot \overrightarrow{IL}$ រួចទាញថា I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

លំហាត់ទី៥៩

គេអោយគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១។ លំហមានទិសដៅតាម

តម្រុយអនុណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ គេយក I ជាចំណុច

កណ្តាលនៃអង្កត់ $[EF]$ និង K ជាផ្ចិតការពេល $ADHE$ ។

១. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IGA ។

២. គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABIG$ រួចទាញរកចម្ងាយពី B ទៅប្លង់ (AIG) ។

លំហាត់ទី៦០

នៅក្នុងតម្រុយអនុនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច ៖

$A(-3, 3, 7), B(3, 6, 1), C(1, 2, -3)$ និង $D(-5, -1, 3)$ ។

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $ABCD$ ជាចតុកោណកែង។

២. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ (DAC) ។

៣. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) និង (Δ') ដែលកែងនឹងប្លង់ (DAC)

រៀងគ្នាត្រង់ C និង D ។

៤.ចំណុច $M \in (\Delta)$ មានអាប់ស៊ីស $x_m = 9$ និងចំណុច $N \in (\Delta')$ មានអាប់ស៊ីស $x_n = -7$ ។ ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (MN) ។

៥.រកកូអរដោនេនៃចំណុច P ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (MN) និងប្លង់ (DAC) ។

៦.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (BM) អត់កូណាល់នឹងប្លង់ (BAN) ហើយបន្ទាត់ (AN) អត់កូណាល់នឹងប្លង់ (ABM) ។ ទាញឲ្យបានថាមុខខាងទាំងអស់នៃតេត្រាអែត $ABMN$ សុទ្ធតែជាត្រីកោណកែង។

៧.យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[MN]$ ។ ចូរស្រាយថា I ជាផ្ចិតនៃស្វ៊ី (S) ចារឹកក្រៅតេត្រាអែត $ABMN$ រួចសរសេរសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ី (S) ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៣

ផ្នែកដំណោះស្រាយលំហាត់ជ្រើសរើស

លំហាត់ទី០១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1, -2, 1), B(-1, 0, 2), C(3, 4, 4)$ និង $D(5, 2, 5)$ ។

១. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{DB}$ ។

២. គណនាផ្ទៃសង់ទ្រនុងទាំងអស់របស់តេត្រាអែត $ABCD$ ។

៣. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ ។

៤. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ។

៥. រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{DB}$ ៖

គេមាន $A(1, -2, 1), B(-1, 0, 2), C(3, 4, 4)$ និង $D(5, 2, 5)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 1), \overrightarrow{AC} = (2, 6, 3), \overrightarrow{AD} = (4, 4, 4), \overrightarrow{BC} = (4, 4, 2)$

$\overrightarrow{CD} = (2, -2, 1)$ និង $\overrightarrow{DB} = (-6, -2, -3)$ ។

២.គណនារង្វាស់ទ្រនុងទាំងអស់របស់តេត្រាអឺត $ABCD$ ៖

$$\text{យើងបាន } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$$

$$AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16+16+16} = 4\sqrt{3}$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$$

$$CD = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$DB = |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$$

ដូចនេះ $AB = 3, AC = 7, AD = 4\sqrt{3}, BC = 6, CD = 3, DB = 7$ (ឯកតាប្រវែង) ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែរ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ ៖

$$\text{យើងមាន } \overrightarrow{AB} = (-2, 2, 1), \overrightarrow{AC} = (2, 6, 3), \overrightarrow{AD} = (4, 4, 4), \overrightarrow{BC} = (4, 4, 2)$$

$$\overrightarrow{CD} = (2, -2, 1) \text{ និង } \overrightarrow{DB} = (-6, -2, -3)$$

$$\text{យើងបាន } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-2)(2) + (2)(-2) + (1)(1) = -7$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (2)(-6) + (6)(-2) + (3)(-3) = -33$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (4)(4) + (4)(4) + (4)(2) = 40$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -7, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -33$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 40$ ។

៤.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ៖

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -7, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -33 \text{ និង } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 40$$

$$\text{យើងបាន } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -7 - 33 + 40 = 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ។

៥.រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{O}$ ៖

តាង $G(x_G, y_G, z_G)$ ដោយគេមាន $A(1, -2, 1), B(-1, 0, 2), C(3, 4, 4)$

និង $D(5, 2, 5)$ នោះគេបាន៖

$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} = (1 - x_G, -2 - y_G, 1 - z_G) \\ \overrightarrow{GB} = (-1 - x_G, -y_G, 2 - z_G) \\ \overrightarrow{GC} = (3 - x_G, 4 - y_G, 4 - z_G) \\ \overrightarrow{GD} = (5 - x_G, 2 - y_G, 5 - z_G) \end{cases}$$

ធ្វើផលបូកវ៉ិចទ័រទាំងបួនខាងលើនេះគេបាន ៖

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = (8 - 4x_G, 4 - 4y_G, 12 - 4z_G)$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{O} \text{ សមមូល } \begin{cases} 8 - 4x_G = 0 \\ 4 - 4y_G = 0 \\ 12 - 4z_G = 0 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = 1 \\ z_G = 3 \end{cases}$$

ដូចនេះ $G(2, 1, 3)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច ៖

$A(1, 4, -5)$, $B(-1, 6, -4)$, $C(3, -2, 4)$ និង $D(5, -4, 3)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនារង្វាស់ជ្រុងនិងអង្កត់ទ្រូងរបស់ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ ។

៤. I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AD]$ ហើយ $K \in [BC]$ ដែល $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$ ។

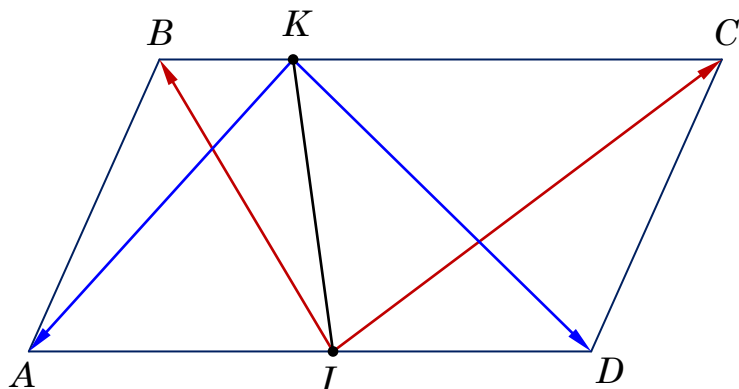
គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I និង K រួចគណនារង្វាស់ IK ។

៥.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$ និង $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KD}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ៖

$A(1, 4, -5)$, $B(-1, 6, -4)$, $C(3, -2, 4)$ និង $D(5, -4, 3)$



យើងបាន $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (5, -4, 3) - (1, 4, -5) = (4, -8, 8)$

ហើយ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (3, -2, 4) - (-1, 6, -4) = (4, -8, 8)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AD} = (4, -8, 8)$ និង $\overrightarrow{BC} = (4, -8, 8)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ដូចនេះចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនារង្វាស់ជ្រុងនិងអង្កត់ទ្រូងរបស់ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ៖

យើងមាន $A(1, 4, -5)$, $B(-1, 6, -4)$, $C(3, -2, 4)$ និង $D(5, -4, 3)$

យើងបាន $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (6-4)^2 + (-4+5)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

$$AD = \sqrt{(5-1)^2 + (-4-4)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{16+64+64} = \sqrt{144} = 12$$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-4)^2 + (4+5)^2} = \sqrt{4+36+81} = \sqrt{121} = 11$$

$$BD = \sqrt{(5+1)^2 + (-4-6)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{36+100+49} = \sqrt{185}$$

ដូចនេះ $AB = DC = 3$, $AD = BC = 12$, $AC = 11$, $BD = \sqrt{185}$ ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែន $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ ៖

យើងមាន $\overrightarrow{AC} = (2, -6, 9)$, $\overrightarrow{DB} = (-6, 10, -7)$

យើងបាន $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (2)(-6) + (-6)(10) + (9)(-7) = -12 - 60 - 63 = -135$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -135$ ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I និង K រួចគណនារង្វាស់ IK

គេមាន $A(1,4,-5)$, $B(-1,6,-4)$, $C(3,-2,4)$ និង $D(5,-4,3)$

ដោយ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AD]$ នោះ $I\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4-4}{2}, \frac{-5+3}{2}\right)$

ដូចនេះ $I(3,0,-1)$ ។

តាង $K(x_k, y_k, z_k)$ នោះ $\overrightarrow{BK} = (x_k + 1, y_k - 6, z_k + 4)$ និង $\overrightarrow{BC} = (4, -8, 8)$

ដោយ $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ សមមូល $\begin{cases} x_k + 1 = 1 \\ y_k - 6 = -2 \\ z_k + 4 = 2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_k = 0 \\ y_k = 4 \\ z_k = -2 \end{cases}$

ដូចនេះ $K(0,4,-2)$ ។

ហើយ $IK = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{26}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

៥.គណនាផលគុណស្កាលែន $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$ និង $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KD}$ ៖

យើងមាន $A(1,4,-5)$, $B(-1,6,-4)$, $C(3,-2,4)$ និង $D(5,-4,3)$

ហើយ $I(3,0,-1)$ និង $K(0,4,-2)$ នោះគេបាន ៖

$\overrightarrow{IB} = (-4, 6, -3)$, $\overrightarrow{IC} = (0, -2, 5)$, $\overrightarrow{KA} = (1, 0, -3)$, $\overrightarrow{KD} = (5, -8, 5)$

យើងបាន $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = 0 - 12 - 15 = -27$ និង $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KD} = 5 + 0 - 15 = -10$

ដូចនេះ $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = -27$ និង $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KD} = -10$ ។

លំហាត់ទី០៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$$A(2, -3, 1), B(3, 5, 5), C(6, -7, 8) \text{ និង } D(10, -2, -3) \text{ ។}$$

១.គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

២.គណនា $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

៣.ស្រាយថា BCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

៤.រកកូអរដោនេនៃចំណុច E ដោយដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ ។

៥.ចូរស្រាយថា $(AE) \perp (BCD)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ៖

$$\text{គេមាន } A(2, -3, 1), B(3, 5, 5), C(6, -7, 8) \text{ និង } D(10, -2, -3)$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} = (1, 8, 4) \text{ និង } \overrightarrow{AC} = (4, -4, 7)$$

$$\text{យើងបាន } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1)(4) + (8)(-4) + (4)(7) = 4 - 32 + 28 = 0 \text{ ។}$$

$$\text{ហើយ } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 64 + 16} = \sqrt{81} = 9 \text{ និង } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 16 + 49} = 9 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, |\overrightarrow{AB}| = 9, |\overrightarrow{AC}| = 9 \text{ ។}$$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ និង $AB = AC = 9$ នោះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A ។

២.គណនា $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{BC}$ ៖

គេមាន $A(2, -3, 1)$, $B(3, 5, 5)$, $C(6, -7, 8)$ និង $D(10, -2, -3)$

នោះ $\overrightarrow{DA} = (-8, -1, 4)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 8, 4)$ និង $\overrightarrow{AC} = (4, -4, 7)$

យើងបាន $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = -8 - 8 + 16 = 0$ និង $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 32 + 28 = 0$

ដូចនេះ $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ និង $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ។

ដោយ $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{AC}$

គេទាញ $\overrightarrow{DA} \perp (ABC)$ ដោយ $\overrightarrow{BC} \subset (ABC)$ នោះគេទាញ $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

៣.ស្រាយថា BCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន $BC = \sqrt{(6-3)^2 + (-7-5)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{9+144+9} = 9\sqrt{2}$

$$BD = \sqrt{(10-3)^2 + (-2-5)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{49+49+64} = 9\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{(10-6)^2 + (-2+7)^2 + (-3-8)^2} = \sqrt{16+25+121} = 9\sqrt{2}$$

ដោយ $BC = BD = CD = 9\sqrt{2}$ នោះ BCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

៤.រកកូអរដោនេនៃចំណុច E ដោយដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ ៖

តាង $E(x_E, y_E, z_E)$ ដោយ $A(2, -3, 1)$, $B(3, 5, 5)$, $C(6, -7, 8)$ និង

$D(10, -2, -3)$ នោះ $\overrightarrow{AE} = (x_E - 2, y_E + 3, z_E - 1)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 8, 4)$

$\overrightarrow{AC} = (4, -4, 7)$, $\overrightarrow{AD} = (8, 1, -4)$ ។

គេបាន $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (13, 5, 7)$ ដោយ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} x_E - 2 = 13 \\ y_E + 3 = 5 \\ z_E - 1 = 7 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} x_E = 15 \\ y_E = 2 \\ z_E = 8 \end{cases}$$

ដូចនេះ $E(15, 2, 8)$ ។

ផ្ត.ស្រាយថា $(AE) \perp (BCD)$ ៖

មាន $E(15, 2, 8)$, $A(2, -3, 1)$, $B(3, 5, 5)$, $C(6, -7, 8)$ និង $D(10, -2, -3)$

នោះ $\overrightarrow{AE} = (13, 5, 7)$, $\overrightarrow{BC} = (3, -12, 3)$, $\overrightarrow{BD} = (7, -7, -8)$

គេមាន $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 39 - 60 + 21 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}$

ហើយ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 91 - 35 - 56 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BD}$

ដោយ $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BD}$ នោះ $\overrightarrow{AE} \perp (BCD)$ ។

ដូចនេះ $(AE) \perp (BCD)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៤

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យត្រីកោណ ABC

មានកំពូល $A(-2, 3, -4)$, $B(4, 9, -1)$ និង $C(2, -5, 4)$ ។

១.គណនា AB, AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(AB), (AC)$ និង (BC) ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដោយដឹងថា $BC \cdot \overrightarrow{IA} + AC \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ។

៤.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $BC \cdot IA^2 + AC \cdot IB^2 + AB \cdot IC^2 = BC \cdot AC \cdot AB$ ។

៥.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា AB, AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ៖

$A(-2, 3, -4)$, $B(4, 9, -1)$ និង $C(2, -5, 4)$

យើងបាន $AB = \sqrt{(4+2)^2 + (9-3)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{36 + 36 + 9} = 9$

$$AC = \sqrt{(2+2)^2 + (-5-3)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{16 + 64 + 64} = 12$$

$$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (-5-9)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{4 + 196 + 25} = 15$$

ដូចនេះ $AB = 9$, $AC = 12$, $BC = 15$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $AB^2 + AC^2 = 81 + 144 = 225 = BC^2$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A (តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រ) ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) , (AC) និង (BC) ៖

គេមាន $A(-2, 3, -4)$, $B(4, 9, -1)$ និង $C(2, -5, 4)$

បន្ទាត់ (AB) , (AC) និង (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា៖

$$\overrightarrow{AB} = (6, 6, 3), \overrightarrow{AC} = (4, -8, 8) \text{ និង } \overrightarrow{BC} = (-2, -14, 5)$$

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) , (AC) និង (BC) អាចសរសេរ៖

$$(AB): \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 3 + 6t \\ z = -4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad (AC): \begin{cases} x = -2 + 4u \\ y = 3 - 8u \\ z = -4 + 8u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$$

$$\text{និង } (BC): \begin{cases} x = 4 - 2v \\ y = 9 - 14v \\ z = -1 + 5v \end{cases}, v \in \mathbb{R}$$

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដោយដឹងថា $BC \cdot \overrightarrow{IA} + AC \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

តាង $I(x_I, y_I, z_I)$ ដោយ $A(-2, 3, -4)$, $B(4, 9, -1)$ និង $C(2, -5, 4)$

$$\text{នោះ } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (-2 - x_I, 3 - y_I, -4 - z_I) \\ \overrightarrow{IB} = (4 - x_I, 9 - y_I, -1 - z_I) \\ \overrightarrow{IC} = (2 - x_I, -5 - y_I, 4 - z_I) \end{cases} \text{ ដោយ } \begin{cases} AB = 9 \\ AC = 12 \\ BC = 15 \end{cases}$$

$$\text{នោះ } \begin{cases} BC \cdot \overrightarrow{IA} = (-30 - 15x_I, 45 - 15y_I, -60 - 15z_I) \\ AC \cdot \overrightarrow{IB} = (48 - 12x_I, 108 - 12y_I, -12 - 12z_I) \\ AB \cdot \overrightarrow{IC} = (18 - 9x_I, -45 - 9y_I, 36 - 9z_I) \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } BC.\overrightarrow{IA} + AC.\overrightarrow{IB} + AB.\overrightarrow{IC} = (36 - 36x_I, 108 - 36y_I, -36 - 36z_I)$$

$$\text{ដោយ } BC.\overrightarrow{IA} + AC.\overrightarrow{IB} + AB.\overrightarrow{IC} = \vec{0} \text{ សមមូល } \begin{cases} 36 - 36x_I = 0 \\ 108 - 36y_I = 0 \\ -36 - 36z_I = 0 \end{cases}$$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = 3 \\ z_I = -1 \end{cases} \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } I(1, 3, -1) \text{ ។}$$

$$\text{៨.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា } BC.IA^2 + AC.IB^2 + AB.IC^2 = BC.AC.AB$$

$$\text{គេមាន } I(1, 3, -1), A(-2, 3, -4), B(4, 9, -1) \text{ និង } C(2, -5, 4)$$

$$\text{គេបាន } IA = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-3)^2 + (-4+1)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$IB = \sqrt{(4-1)^2 + (9-3)^2 + (-1+1)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$IC = \sqrt{(2-1)^2 + (-5-3)^2 + (4+1)^2} = 3\sqrt{10}$$

$$\text{ដោយ } AB = 9, AC = 12, BC = 15 \text{ នោះគេបាន ៖}$$

$$BC.IA^2 + AC.IB^2 + AB.IC^2 = (15)(3\sqrt{2})^2 + (12)(3\sqrt{5})^2 + (9)(3\sqrt{10})^2 = 1620$$

$$\text{ហើយ } BC.AC.AB = (9)(12)(15) = 1620$$

$$\text{ដូចនេះ } BC.IA^2 + AC.IB^2 + AB.IC^2 = BC.AC.AB \text{ ពិត។}$$

៥. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ ៖

គេមាន $I(1, 3, -1)$, $A(-2, 3, -4)$, $B(4, 9, -1)$ និង $C(2, -5, 4)$

បន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា ៖

$\overrightarrow{IA} = (-3, 0, -3)$, $\overrightarrow{IB} = (3, 6, 0)$ និង $\overrightarrow{IC} = (1, -8, 5)$

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ អាចសរសេររៀងគ្នា ៖

$$(IA): \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 \\ z = -1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$(IB): \begin{cases} x = 1 + 3u \\ y = 3 + 6u \\ z = -1 \end{cases}, u \in \mathbb{R}$$

$$(IC): \begin{cases} x = 1 + v \\ y = 3 - 8v \\ z = -1 + 5v \end{cases}, v \in \mathbb{R}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យពីរចំណុច ៖

$A(2, -3, 1)$ និង $B(6, 9, 7)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេ I កណ្តាលអង្កត់ $[AB]$ រួចគណនាប្រវែង AB ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែរ (S) មានអង្កត់ផ្ចិត AB ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) និងសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ $[AB]$ ។

៤.គេឲ្យចំណុច $C(1, 1, -2)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $C \in (S)$ រួចសរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច C ។

៥. D ជាចំណុចមួយដែល $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច D រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $CADB$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេ I កណ្តាលអង្កត់ $[AB]$ រួចគណនាប្រវែង AB ៖

គេមាន $A(2, -3, 1)$ និង $B(6, 9, 7)$

ដោយ I ជាចំណុចកណ្តាលអង្កត់ $[AB]$ នោះ $I\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-3+9}{2}, \frac{1+7}{2}\right)$

ដូចនេះ $I(4, 3, 4)$ ។

$$\text{ហើយ } AB = \sqrt{(6-2)^2 + (9+3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{16+144+36} = 14$$

ដូចនេះ $AB=14$ (ឯកតាប្រវែង) ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ី(S) មានអង្កត់ធ្នឹត AB ៖

ផ្ចិតរបស់ស្វ៊ី(S) មានអង្កត់ធ្នឹត AB គឺ $I(4,3,4)$ និងមានកាំ $r = \frac{AB}{2} = \frac{14}{2} = 7$

សមីការស្វ៊ី(S) អាចសរសេរ ៖

$$(S): (x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 + (z-z_I)^2 = r^2$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 7^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 49$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z - 8 = 0$$

ដូចនេះ $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z - 8 = 0$ ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AB)និងសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ $[AB]$ ៖

គេមាន $A(2,-3,1)$ និង $B(6,9,7)$

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(AB) គឺ $\overrightarrow{AB} = (4,12,6)$ ។

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AB) អាចសរសេរ៖

$$(AB): \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 + 12t \\ z = 1 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

តាង (π) ជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

វ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (π) គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (4, 12, 6)$ ហើយ $I(4, 3, 4) \in (\pi)$

សមីការប្លង់ (π) អាចសរសេរ ៖

$$(\pi): a(x - x_I) + b(y - y_I) + c(z - z_I) = 0$$

$$4(x - 4) + 12(y - 3) + 6(z - 4) = 0$$

$$4x - 16 + 12y - 36 + 6z - 24 = 0$$

$$4x + 12y + 6z - 76 = 0$$

$$2x + 6y + 3z - 38 = 0$$

ដូចនេះ $(\pi): 2x + 6y + 3z - 38 = 0$ ។

៨. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $C \in (S)$ ៖

គេមាន $C(1, 1, -2)$ និង $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z - 8 = 0$

យកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែរ (S) គេបាន ៖

$$1 + 1 + 4 - 8 - 6 + 16 - 8 = 0 \text{ ឬ } 0 = 0 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់។}$$

ដូចនេះ $C \in (S)$ ។

សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច C ៖

គេមាន $I(4, 3, 4)$ និង $C(1, 1, -2)$ នោះ $\overrightarrow{IC} = (-3, -2, -6)$ ជាវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់

នៃប្លង់ (P) ដែលប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច C ។

សមីការនៃប្លង់(P) អាចសរសេរ ៖

$$(P): a(x - x_c) + b(y - y_c) + c(z - z_c) = 0$$

$$-3(x - 1) - 2(y - 1) - 6(z + 2) = 0$$

$$-3x + 3 - 2y + 2 - 6z - 12 = 0$$

$$-3x - 2y - 6z - 7 = 0$$

$$3x + 2y + 6z + 7 = 0$$

ដូចនេះ (P): $3x + 2y + 6z + 7 = 0$ ។

ផ្ដេរកត្តាអវដៅនៃចំណុច D រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $CADB$ ៖

គេមាន $A(2, -3, 1)$, $B(6, 9, 7)$ និង $C(1, 1, -2)$

នោះ $\overrightarrow{CA} = (1, -4, 3)$, $\overrightarrow{CB} = (5, 8, 9)$ និង $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (6, 4, 12)$

តាង $D(x_d, y_d, z_d)$ នោះ $\overrightarrow{CD} = (x_d - 1, y_d - 1, z_d + 2)$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \text{ សមមូល } \begin{cases} x_d - 1 = 6 \\ y_d - 1 = 4 \\ z_d + 2 = 12 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x_d = 7 \\ y_d = 5 \\ z_d = 10 \end{cases}$$

ដូចនេះ $D(7, 5, 10)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AC} = (-1, 4, -3)$, $\overrightarrow{AD} = (5, 8, 9)$, $\overrightarrow{DB} = (-1, 4, -3)$

ដោយ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -5 + 32 - 27 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$

ដូចនេះចតុកោណ $CADB$ ជាចតុកោណកែង ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច A មាន

កូអរដោនេ $(3, 1, 1)$ និងប្លង់ (P) មានសមីការ $2x - y - 2z + 6 = 0$ ។

១. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (P) ។

២. H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A លើប្លង់ (P) ។ គណនាកូអរដោនេនៃ

ចំណុច H រួចសរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ី (S) មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាម A ។

៣. B ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x_b = 0$ ហើយ $B \in (P)$ និង $B \in (S)$ ។

ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B ។

៤. C ជាចំណុចមានអរដោនេ $y_c = 0$ ហើយ $C \in (P)$ និង $C \in (S)$ ។

ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច C ។

៥. គេឲ្យចំណុច $D(3, 4, 4)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $D \in (P)$ និង $D \in (S)$ ។

ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ី (S) ត្រង់ចំណុច D

ដោយដឹងថា $(L) \subset (P)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (P)

គេមាន $A(3, 1, 1)$ និង $(P): 2x - y - 2z + 6 = 0$

$$\text{យើងបាន } d(A,(P)) = \frac{|2x_a - y_a - 2z_a + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|2(3) - (1) - 2(1) + 6|}{3} = 3$$

$$\text{ដូចនេះ } d(A,(P)) = 3 \text{ (ឯកតាប្រវែង) ។}$$

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ៖

តាង $H(x_h, y_h, z_h)$ ។ ដោយ H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A លើ (P)

$$\text{នោះ } H \in (P) \text{ សមមូល } 2x_h - y_h - 2z_h + 6 = 0 \quad (1)$$

$$\text{ប្លង់}(P) \text{ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ } \vec{n} = (2, -1, -2) \text{ ហើយ } \overrightarrow{AH} = (x_h - 3, y_h - 1, z_h - 1)$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AH} \perp (P) \text{ និង } \vec{n} \perp (P) \text{ នោះ } \overrightarrow{AH} // \vec{n} \text{ នាំឲ្យ } \overrightarrow{AH} = \lambda \vec{n}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{គេទាញ } \begin{cases} x_h - 3 = 2\lambda \\ y_h - 1 = -\lambda \\ z_h - 1 = -2\lambda \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x_h = 3 + 2\lambda \\ y_h = 1 - \lambda \\ z_h = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad (2)$$

យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន ៖

$$2(3 + 2\lambda) - (1 - \lambda) - 2(1 - 2\lambda) + 6 = 0$$

$$6 + 4\lambda - 1 + \lambda - 2 + 4\lambda + 6 = 0$$

$$9\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda = -1$$

$$\text{យក } \lambda = -1 \text{ ជំនួសក្នុង(2) គេបាន } \begin{cases} x_h = 3 - 2 = 1 \\ y_h = 1 + 1 = 2 \\ z_h = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ } H(1, 2, 3) \text{ ។}$$

សរសេរសមីការទូទៅនៃផ្ទៃស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាម A ៖

សមីការផ្ទៃស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $H(1,2,3)$ អាចសរសេរ ៖

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = r^2$$

ដោយ (S) កាត់តាមចំណុច $A(3,1,1)$ នោះកូអរដោនេនៃ A ផ្ទៀងផ្ទាត់ (S)

$$\text{គេបាន } (3-1)^2 + (1-2)^2 + (1-3)^2 = r^2 \text{ ឬ } r^2 = 9 \text{ ឬ } r = 3$$

$$\text{គេបាន } (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$$

ដោយពន្លាតសមីការនេះរួចបង្រួមគេបាន ៖

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0 \quad ។$$

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B

ដោយ B ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x_b = 0$ នោះ $B(0, y_b, z_b)$ ហើយ $B \in (P)$ និង

$$B \in (S) \text{ នោះគេបាន } \begin{cases} -y_b - 2z_b + 6 = 0 \\ y_b^2 + z_b^2 - 4y_b - 6z_b + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} y_b = -2z_b + 6 & (b_1) \\ y_b^2 + z_b^2 - 4y_b - 6z_b + 5 = 0 & (b_2) \end{cases}$$

យកសមីការ (b_1) ជួសក្នុង (b_2) គេបាន ៖

$$(-2z_b + 6)^2 + z_b^2 - 4(-2z_b + 6) - 6z_b + 5 = 0$$

$$4z_b^2 - 24z_b + 36 + z_b^2 + 8z_b - 24 - 6z_b + 5 = 0$$

$$5z_b^2 - 22z_b + 17 = 0 \text{ ដោយ } a + b + c = 0 \text{ នោះ } z_b' = 1, z_b'' = \frac{17}{5}$$

$$\text{ចំពោះ } z_b' = 1 \text{ នោះ } y_b = -2 + 6 = 4 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } B_1(0, 4, 1) \text{ ។}$$

$$\text{ចំពោះ } z_b'' = \frac{17}{5} \text{ នោះ } y_b = -\frac{34}{5} + 6 = -\frac{4}{5} \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } B_2\left(0, -\frac{4}{5}, \frac{17}{5}\right) \text{ ។}$$

៤. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច C ៖

ដោយ C ជាចំណុចមានអ័រដោនេ $y_c = 0$ នោះ $C(x_c, 0, z_c)$ ហើយ $C \in (P)$ និង

$$C \in (S) \text{ នោះគេបាន } \begin{cases} 2x_c - 2z_c + 6 = 0 \\ x_c^2 + z_c^2 - 2x_c - 6z_c + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} x_c = z_c - 3 & (c_1) \\ x_c^2 + z_c^2 - 2x_c - 6z_c + 5 = 0 & (c_2) \end{cases}$$

យកសមីការ (c_1) ជួសក្នុង (c_2) គេបាន ៖

$$(z_c - 3)^2 + z_c^2 - 2(z_c - 3) - 6z_c + 5 = 0$$

$$z_c^2 - 6z_c + 9 + z_c^2 - 2z_c + 6 - 6z_c + 5 = 0$$

$$2z_c^2 - 14z_c + 20 = 0$$

$$2(z_c - 2)(z_c - 5) = 0$$

$$\text{គេទាញយក } z_c' = 2, z_c'' = 5 \text{ ។}$$

ចំពោះ $z_c' = 2$ នោះ $x_c = 2 - 3 = -1$ ។

ដូចនេះ $C_1(-1, 0, 2)$ ។

ចំពោះ $z_c'' = 5$ នោះ $x_c = 5 - 3 = 2$ ។

ដូចនេះ $C_2(2, 0, 5)$ ។

៥. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $D \in (P)$ និង $D \in (S)$ ៖

គេមាន $D(3, 4, 4)$ ហើយ $(P): 2x - y - 2z + 6 = 0$

និង $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ ។

យកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$6 - 4 - 8 + 6 = 0$ ឬ $0 = 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នោះ $D \in (P)$ ។

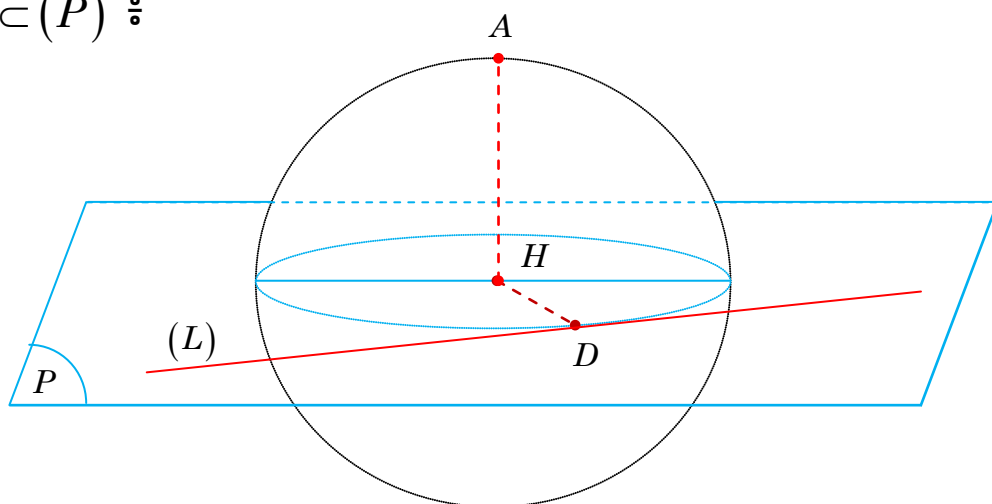
យកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជំនួសក្នុង (S) គេបាន ៖

$9 + 16 + 16 - 6 - 16 - 24 + 5 = 0$ ឬ $0 = 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នោះ $D \in (S)$ ។

ដូចនេះ $D \in (P)$ និង $D \in (S)$ ។

សរសេរសមីការប្លង់ម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច D ដោយដឹងថា

$(L) \subset (P)$ ៖



គេមាន $(L) \subset (P)$ និង $\overline{AH} \perp (P)$ នោះ $\overline{AH} \perp (L)$ ហើយ (L) ប៉ះនឹង

(S) ត្រង់ D នោះ $\overline{HD} \perp (L)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AH} \perp (L)$ និង $\overrightarrow{HD} \perp (L)$ នោះ $(L) \perp (HAD)$ ហេតុនេះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់
នៃប្លង់ (HAD) ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) ។

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (HAD) គឺ $\vec{N} = \overrightarrow{HA} \times \overrightarrow{HD}$ ដោយ $H(1,2,3), A(3,1,1)$
និង $D(3,4,4)$ នោះ $\overrightarrow{HA} = (2, -1, -2)$ & $\overrightarrow{HD} = (2, 2, 1)$

$$\text{គេបាន } \vec{N} = \overrightarrow{HA} \times \overrightarrow{HD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}$$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) ឲ្យតាមរូបមន្ត $(L): \begin{cases} x = x_d + at \\ y = y_d + bt \\ z = z_d + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $(L): \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 4 - 6t \\ z = 4 + 6t \end{cases}$ ដែល $t \in \mathbb{R}$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

សមីការឆ្លុះ $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = z-2$ និងចំណុច $A(2, -1, 3)$ ។

H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A ទៅលើបន្ទាត់ (L) ។

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនាប្រវែង AH ។

២. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ី (S) មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាមចំណុច A ។

៣. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B និង C ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងស្វ៊ី (S) ។

៤. P ជាចំណុចមួយផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃ P ។

៥. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P \in (S)$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ $PBAC$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនាប្រវែង AH ៖

គេមាន $(L): \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = z-2$ និងចំណុច $A(2, -1, 3)$

តាង $H(x_h, y_h, z_h)$ ។ ដោយ H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A ទៅលើ

បន្ទាត់ (L) នោះ $H \in (L)$ សមមូល $\frac{x_h-3}{2} = \frac{y_h-3}{2} = z_h-2$

សមមូល $x_h = 2z_h - 1$, $y_h = 2z_h - 1$ ។

គេបាន $H(2z_h - 1, 2z_h - 1, z_h)$ ។

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺ $\vec{u} = (2, 2, 1)$ ។ ដោយ $\overline{AH} \perp (L)$ នោះគេបាន

$$\overline{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overline{AH} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{ដោយ } \overline{AH} = (2z_h - 3, 2z_h, z_h - 3)$$

$$\text{គេបាន } \overline{AH} \cdot \vec{u} = 2(2z_h - 3) + 2(2z_h) + (z_h - 3) = 0$$

$$\text{សមមូល } 4z_h - 6 + 4z_h + z_h - 3 = 0$$

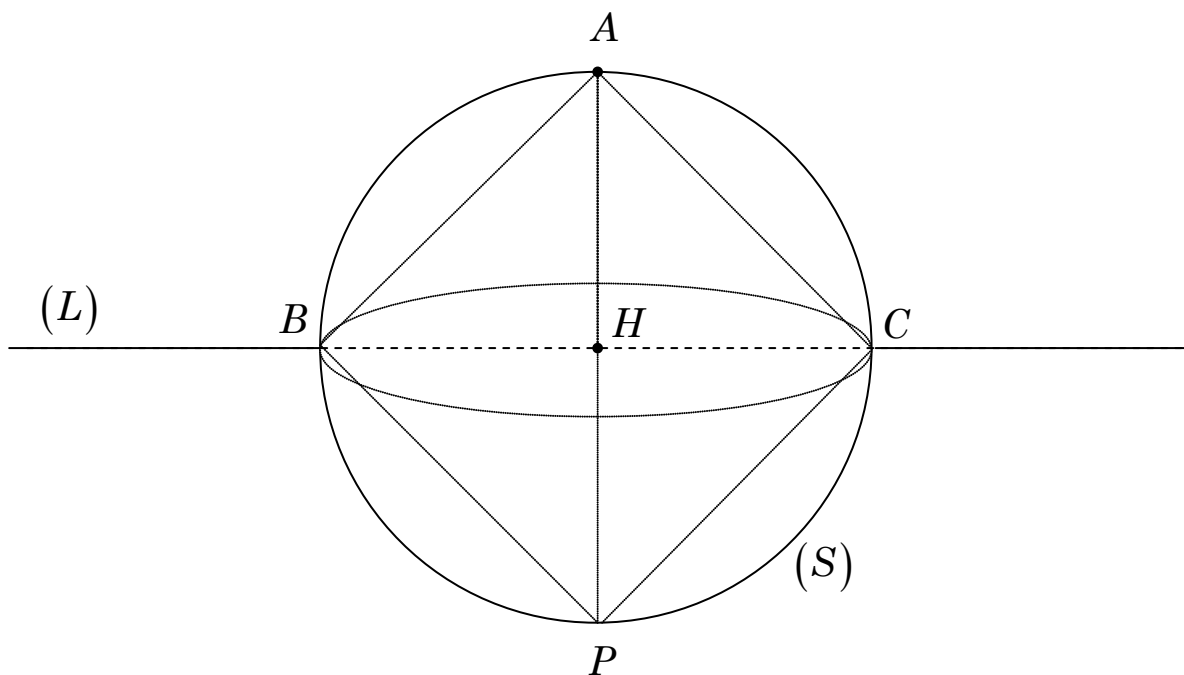
$$9z_h - 9 = 0$$

$$z_h = 1$$

$$\text{ហើយ } x_h = 2(1) - 1 = 1 \text{ និង } y_h = 2(1) - 1 = 1 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } H(1, 1, 1) \text{ ។}$$

២. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាមចំណុច A ៖



កាំរបស់ស្វ៊ី(S)មានផ្ចិត H កាត់តាម A គឺ ៖

$$R = HA = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-1)^2 + (3-1)^2} = 3$$

ដូចនេះសមីការស្វ៊ី(S)សរសេរ (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B និង C ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(L)និងស្វ៊ី(S)៖

$$\text{គេមាន } (S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$$

$$\text{និង } (L): \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = z-2$$

$$\text{តាង } \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = z-2 = t \text{ នោះ: } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (1)$$

យក(1)ជួសក្នុង(S)គេបាន ៖

$$(3 + 2t - 1)^2 + (3 + 2t - 1)^2 + (2 + t - 1)^2 = 9$$

$$(2t + 2)^2 + (2t + 2)^2 + (t + 1)^2 = 9$$

$$4t^2 + 8t + 4 + 4t^2 + 8t + 4 + t^2 + 2t + 1 = 9$$

$$9t^2 + 18t = 0$$

$$9t(t + 2) = 0$$

គេទាញយក $t_1 = 0$, $t_2 = -2$ ។

ចំពោះ $t_1 = 0$ តាម(1) គេបាន $x = 3, y = 3, z = 2$ ។

ចំពោះ $t_2 = -2$ តាម(1) គេបាន $x = -1, y = -1, z = 0$ ។

ដូចនេះ $B(3, 3, 2)$ និង $C(-1, -1, 0)$ ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃ P ៖

គេមាន $A(2,-1,3)$, $B(3,3,2)$ និង $C(-1,-1,0)$ ។

តាង $P(x_p, y_p, z_p)$ នោះ $\overrightarrow{AP} = (x_p - 2, y_p + 1, z_p - 3)$

ហើយ $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, -3)$ នោះ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-2, 4, -4)$

ដោយ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ សមមូល
$$\begin{cases} x_p - 2 = -2 \\ y_p + 1 = 4 \\ z_p - 3 = -4 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} x_p = 0 \\ y_p = 3 \\ z_p = -1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $P(0, 3, -1)$ ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P \in (S)$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ $PBAC$ ៖

គេមាន $P(0, 3, -1)$ និង $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$

យកកូអរដោនេនៃចំណុច P ជួសក្នុងសមីការ (S) គេបាន ៖

$(0-1)^2 + (3-1)^2 + (-1-1)^2 = 9$ ឬ $9 = 9$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដូចនេះ $P \in (S)$ ។

គេមាន $P(0, 3, -1)$, $A(2, -1, 3)$, $B(3, 3, 2)$ និង $C(-1, -1, 0)$ ។

នោះ $\overrightarrow{AP} = (2, -4, 4)$ និង $\overrightarrow{BC} = (-4, -4, -2)$

គេបាន $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = -8 + 16 - 8 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$

ហើយ $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$ នោះ $AP = BC$

ចតុកោណ $PBAC$ មានអង្កត់ទ្រូង $AP = BC = 6$ និង $AP \perp BC$ ជាការពិត។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៨

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យស្វ័យ (S) មាន

សមីការ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ និងចំណុច $P(-1, 5, 7)$ ។

១. គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ័យ (S) រួចគណនា IP ។

២. បន្ទាត់ (IP) ប្រសព្វស្វ័យ (S) ត្រង់ចំណុច A និង B ដែល A នៅចន្លោះចំណុច I និង P ។ គណនា PA និង PB ។

៣. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។

៤. រកសំណុំនៃចំណុច M ស្ថិតនៅលើស្វ័យ (S) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $PM^2 = PA \cdot PB$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ័យ (S) រួចគណនា IP

សមីការ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ អាចសរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដារ

$$(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9 \quad \text{។}$$

ដូចនេះកូអរដោនេនៃផ្ចិតនិងកាំនៃស្វ័យគឺ $I(2, -1, 1)$ និង $r = 3$ ។

ម្យ៉ាងទៀតមាន $P(-1, 5, 7)$ នោះ $\overrightarrow{IP} = (-3, 6, 6)$ ។

$$\text{គេបាន } IP = |\overrightarrow{IP}| = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $IP = 9$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $AB = 2r = 6$ និង $AP = 6$ នោះ A ជាចំណុចកណ្តាលនៃ

$$\text{អង្កត់}[BP] \text{ ។ គេបាន } \begin{cases} x_a = \frac{x_b + x_p}{2} \\ y_a = \frac{y_b + y_p}{2} \\ z_a = \frac{z_b + z_p}{2} \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} x_b = 2x_a - x_p \\ y_b = 2y_a - y_p \\ z_b = 2z_a - z_p \end{cases}$$

$$\text{ដោយ } A(1,1,3) \text{ និង } P(-1,5,7) \text{ នោះ } \begin{cases} x_b = 2 + 1 = 3 \\ y_b = 2 - 5 = -3 \\ z_b = 6 - 7 = -1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $B(3,-3,-1)$ ។

៤.រកសំណុំនៃចំណុច M ស្ថិតនៅលើស្វ៊ែរ (S) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $PM^2 = PA.PB$ ៖

តាង (C) ជារង្វង់បានមកពីប្រសព្វរវាងប្លង់ (MAB) ជាមួយស្វ៊ែរ (S) ។

តាមទ្រឹស្តីបទស្វ៊ែរគុណចំណុច P ធៀបទៅនឹងរង្វង់ (C) ដែល $PM^2 = PA.PB$

នោះគេបាន PM ជាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ (C) ត្រង់ M ។

ដោយ $[AB]$ ជាអង្កត់ផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ (S) នោះប្លង់ (MAB) ជាប្លង់វិជ្ជមានត្រនៃ (S)

នោះគេទាញបានផ្ចិត I របស់ស្វ៊ែរ (S) គឺជាផ្ចិតនៃរង្វង់ (C) ។

គេទាញបាន $PM \perp IM$ ហើយដោយ $M \in (S)$ នោះសំណុំចំណុច M គឺជា

រង្វង់ (C') ដែលជាប្រសព្វរវាងស្វ៊ែរ (S) និងប្លង់ដែលកាត់តាម M ហើយកែងនឹង

$[AB]$ ត្រង់ចំណុច H ដែល H ជាផ្ចិតនិង MH ជាកាំរបស់រង្វង់ (C') ។

យើងអាចគណនារង្វាស់ MH និងកូអរដោនេចំណុច H ដូចខាងក្រោម៖

គេមាន $PM^2 = PA.PB = 6 \times 12 = 72$ នោះ $PM = 6\sqrt{2}$ និង $IM = r = 3$

ក្នុងត្រីកោណកែង PMI មាន MH ជាកម្ពស់គេមានទំនាក់ទំនង ៖

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{IM^2} + \frac{1}{PM^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72} = \frac{1}{8} \text{ នោះគេទាញបាន } MH = 2\sqrt{2} \text{ ។}$$

ក្នុងត្រីកោណកែង IMH គេមាន $IM^2 = IH^2 + MH^2$ (ពីតាគីរ៉េ)

$$\text{គេទាញ } IH = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 - 8} = 1 \text{ ។}$$

ដោយ $IA = 3$ នោះ $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ ដោយ $I(2, -1, 1), A(1, 1, 3)$

គេបាន $\overrightarrow{IA} = (-1, 2, 2)$ និង $\overrightarrow{IH} = (x_h - 2, y_h + 1, z_h - 1)$

$$\overrightarrow{IH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} \text{ សមមូល } \begin{cases} x_h - 2 = -\frac{1}{3} \\ y_h + 1 = \frac{2}{3} \\ z_h - 1 = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x_h = \frac{5}{3} \\ y_h = -\frac{1}{3} \\ z_h = \frac{5}{3} \end{cases}$$

ដូចនេះ $H\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ ជាកូអរដោនេផ្ចិតនៃរង្វង់ (C') ។

លំហាត់ទី០៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(0; -3; -4)$; $B(2, 1, 8)$; $C(2; 4; 5)$ និង $D(4; -2, -3)$ ។ M និង N ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់រៀងគ្នា (AB) និង (CD) ។

កំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច M និង N ដើម្បីឲ្យអង្កត់ MN មានប្រវែងខ្លីបំផុត រួចកំណត់ប្រវែងខ្លីបំផុតនោះ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច M និង N

តាង $M(x_1; y_1; z_1)$ និង $N(x_2; y_2; z_2)$

គេមាន $\overrightarrow{AB}(2; 4; 12)$; $\overrightarrow{CD}(2; -6; -8)$

$\overrightarrow{AM}(x_1; y_1 + 3; z_1 + 4)$ និង $\overrightarrow{CN}(x_2 - 2; y_2 - 4; z_2 - 5)$

ដោយ $M \in (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$

$$\text{គេទាញ } \frac{x_1}{2} = \frac{y_1 + 3}{4} = \frac{z_1 + 4}{12} = p \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2p \\ y_1 = 4p - 3 \\ z_1 = 12p - 4 \end{cases} \quad (i)$$

ដូចគ្នាដែរ $N \in (CD) \Rightarrow \overrightarrow{CN} // \overrightarrow{CD}$

$$\text{គេទាញ } \frac{x_2 - 2}{2} = \frac{y_2 - 4}{-6} = \frac{z_2 - 5}{-8} = q \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2q + 2 \\ y_2 = -6q + 4 \\ z_2 = -8q + 5 \end{cases} \quad (ii)$$

កំប៉ូសង់ស្កាលែននៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$ គឺ ៖

$$\overrightarrow{MN} = (2q - 2p + 2 ; -6q - 4p + 7 ; -8q - 12p + 9)$$

ដើម្បីឲ្យអង្កត់ MN មានប្រវែងខ្លីបំផុត រួចកំណត់ប្រវែងខ្លីបំផុតលុះត្រាតែ ៖

$$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AB} \text{ និង } \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{CD} \text{ សមមូល } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ និង } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = -22p - 58q + 80 = 0 \Rightarrow 11p + 59q - 40 = 0 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = 62p + 48q - 55 = 0 \quad (2)$$

$$\text{តាមសមីការ (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ } \begin{cases} 11p + 59q - 40 = 0 \\ 62p + 48q - 55 = 0 \end{cases}$$

$$\text{បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ } p = q = \frac{1}{2} \text{ ។}$$

$$\text{យកតម្លៃ } p = \frac{1}{2} \text{ និង } q = \frac{1}{2} \text{ ជំនួសក្នុង (i) និង (ii)}$$

$$\text{គេបាន } M(1 ; -1 ; 2) \text{ និង } N(3 ; 1 ; 1) \text{ ។}$$

កំណត់ប្រវែងខ្លីបំផុតរបស់ អង្កត់ MN ៖

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{MN} = (2 ; 2 ; -1) \text{ នោះគេបាន } |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{ដូចនេះប្រវែងខ្លីបំផុតរបស់អង្កត់ } MN \text{ គឺ } MN = 3 \text{ (ឯកតាប្រវែង) ។}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១០

ក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(-1, 2, 3)$, $B(0, -1, 1)$ និង $C(2, 3, 5)$ ។

១.ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$

និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច B និង C ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H រវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយប្លង់ (P) ។

៣.រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ $\triangle ABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់សមីការប្លង់ (P) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L)

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (2, 4, 4)$ ។

សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A អាចសរសេរតាមរូបមន្ត

$$(P) : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(P) : 2(x + 1) + 4(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

$$(P) : 2x + 4y + 4z - 18 = 0$$

$$(P) : x + 2y + 2z - 9 = 0$$

ដូចនេះ $(P) : x + 2y + 2z - 9 = 0$ ។

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺ $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (2, 4, 4)$

សមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច B និង C អាចសរសេរ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } (L): \begin{cases} x = x_B + at \\ y = y_B + bt \\ z = z_B + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ } (L): \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H ៖

យកសមីការ (L) ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$$18t - 9 = 0 \quad \text{នាំឲ្យ} \quad t = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

$$\text{យកតម្លៃ } t = \frac{1}{2} \text{ ជំនួសក្នុងសមីការ}(L)\text{គេបាន} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2 = 1 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ } H(1,1,3) \quad \text{។}$$

៣.រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{AB} = (1, -3, -2); \overrightarrow{BC} = (2, 4, 4); \overrightarrow{CA} = (-3, -1, -2)$$

$$\text{ដោយ } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}; |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$\text{នោះគេទាញ } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{14} \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ } ABC \text{ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល } A \text{ ។ ម្យ៉ាងទៀត } \overrightarrow{AH} = (2, -1, 0)$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (2)(2) + (-1)(4) + (0)(4) = 0 \text{ សមមូល } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$\text{នោះ } AH \text{ ជាកម្ពស់នៃ } \triangle ABC \text{ ។ គេបាន } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$\text{តែ } AH = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}, BC = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$\text{ដូចនេះ } S_{ABC} = 3\sqrt{5} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)។}$$

លំហាត់ទី១១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

$$\text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិក}(L): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 6 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{និងប្លង់}(P): 2x + 2y + z - 9 = 0$$

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

២. M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 3$ និងស្ថិតនៅលើ (L) ហើយ H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើប្លង់ (P) ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M និង H ។

៣. គេសង់ប្លង់ (Q) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ M ហើយគេតាង (d) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។ សរសេរសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិកបន្ទាត់ (d) ។

៤. គេគូសបន្ទាត់ (AH) ប្រសព្វប្លង់ (Q) ត្រង់ K ។ ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិកនៃបន្ទាត់ (AH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច K ។

៥. គណនា MA និង MK រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ AMK ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P)

តាង $A(x_a, y_a, z_a)$ ។ ដោយ $A \in (L)$ និង $A \in (P)$ គេបាន៖

$$\begin{cases} x_a = 2 + t \\ y_a = 6 + 4t \\ z_a = 2 - t \end{cases} \quad (1) \quad \text{និង} \quad 2x_a + 2y_a + z_a - 9 = 0 \quad (2)$$

យកសមីការ(1) ជួសក្នុងសមីការ(2) គេបាន៖

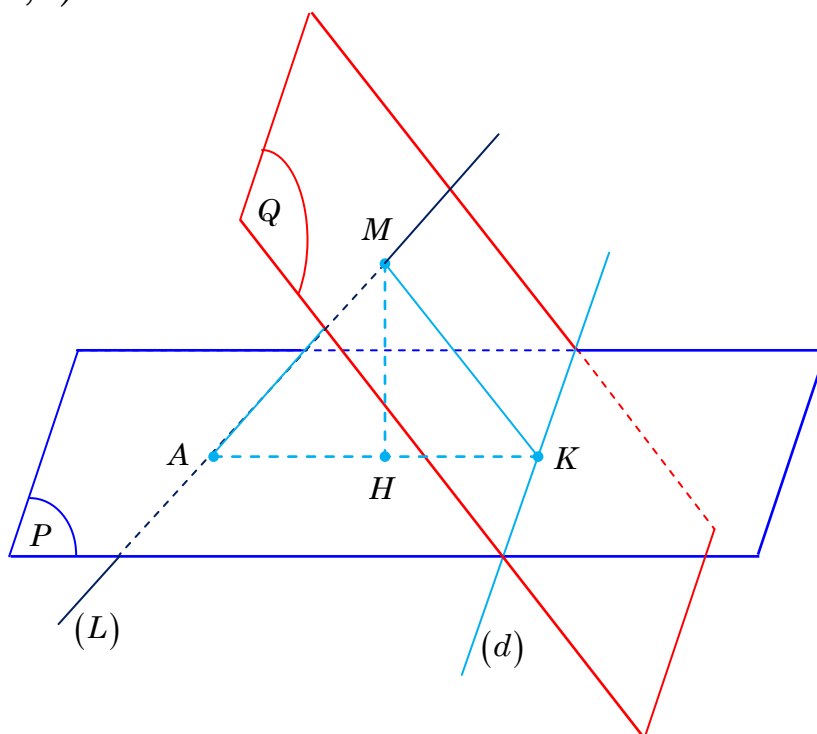
$$2(2+t) + 2(6+4t) + (2-t) - 9 = 0$$

$$4 + 2t + 12 + 8t + 2 - t - 9 = 0$$

$$9t + 9 = 0$$

គេទាញបាន $t = -1$ យកជំនួសក្នុងសមីការ(1) គេបាន $\begin{cases} x_a = 2 - 1 = 1 \\ y_a = 6 - 4 = 2 \\ z_a = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

ដូចនេះ $A(1,2,3)$ ។



២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M និង H

ដោយ $M \in (L)$ ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 3$ នោះគេបាន $\begin{cases} x_m = 2 + t = 3 \\ y_m = 6 + 4t \\ z_m = 2 - t \end{cases}$

គេទាញបាន $t = 1$ ហើយ $y_m = 6 + 4 = 10$, $z_m = 2 - 1 = 1$ ។

ដូចនេះ $M(3,10,1)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើប្លង់ (P) នោះ $H \in (P)$

$$\text{គេបាន } 2x_h + 2y_h + z_h - 9 = 0 \quad (3)$$

ប្លង់ $(P): 2x + 2y + z - 9 = 0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_p = (2, 2, 1)$ ។

គេមាន $\overline{MH} \perp (P)$ និង $\vec{n}_p \perp (P)$ នោះ $\overline{MH} // \vec{n}_p$ គេទាញ $\overline{MH} = \lambda \vec{n}_p$

ដោយ $\overline{MH} = (x_h - 3, y_h - 10, z_h - 1)$ និង $\vec{n}_p = (2, 2, 1)$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} x_h - 3 = 2\lambda \\ y_h - 10 = 2\lambda \\ z_h - 1 = \lambda \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x_h = 3 + 2\lambda \\ y_h = 10 + 2\lambda \\ z_h = 1 + \lambda \end{cases} \quad (4)$$

យក(4) ជួសក្នុង(3) គេបាន $2(3 + 2\lambda) + 2(10 + 2\lambda) + (1 + \lambda) - 9 = 0$

$$6 + 4\lambda + 20 + 4\lambda + 1 + \lambda - 9 = 0$$

$$9\lambda + 18 = 0$$

$$\lambda = -2$$

$$\text{យក } \lambda = -2 \text{ ជួសក្នុង(4) គេបាន } \begin{cases} x_h = 3 - 4 = -1 \\ y_h = 10 - 4 = 6 \\ z_h = 1 - 2 = -1 \end{cases} \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $H(-1, 6, -1)$ ។

៣. សរសេរសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប្លង់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រិក (d)

ដោយប្លង់ (Q) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ M នោះវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺជា

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (Q) គឺ $\vec{n}_Q = \vec{u}_L = (1, 4, -1)$ និង $M(3, 10, 1) \in (Q)$

សមីការនៃប្លង់ (Q) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$$(Q): a(x - x_m) + b(y - y_m) + c(z - z_m) = 0$$

$$1(x-3) + 4(y-10) - (z-1) = 0$$

$$x - 3 + 4y - 40 - z + 1 = 0$$

$$x + 4y - z - 42 = 0$$

ដូចនេះ $(Q): x + 4y - z - 42 = 0$ ។

ហើយដោយ (d) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) នោះវាជាសំណុំចម្លើយ

នៃប្រព័ន្ធសមីការ
$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 9 = 0 \\ x + 4y - z - 42 = 0 \end{cases}$$

យក $y = t, t \in \mathbb{R}$ នោះគេបាន
$$\begin{cases} 2x + 2t + z - 9 = 0 & (i) \\ x + 4t - z - 42 = 0 & (ii) \end{cases}$$

បូកសមីការ $(i) \& (ii)$ គេបាន $3x + 6t - 51 = 0$ នោះ $x = 17 - 2t$

តាម (i) គេបាន $2(17 - 2t) + 2t + z - 9 = 0$ នោះ $z = -25 + 2t$

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់គឺ $(d): \begin{cases} x = 17 - 2t \\ y = t \\ z = -25 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

៨. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច K ។

បន្ទាត់ (AH) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AH} = (-2, 4, -4)$ ឬ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = (-1, 2, -2)$

តាមរូបមន្ត $(AH): \begin{cases} x = x_a + at \\ y = y_a + bt \\ z = z_a + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $(AH): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ម្យ៉ាងទៀតដោយបន្ទាត់(AH) ប្រសព្វប្លង់(Q)ត្រង់ K នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} x_k = 1 - t \\ y_k = 2 + 2t \quad (5) \text{ និង } x_k + 4y_k - z_k - 42 = 0 \quad (6) \\ z_k = 3 - 2t \end{cases}$$

យកសមីការ(5) ជំនួសក្នុង(6) គេបាន $(1 - t) + 4(2 + 2t) - (3 - 2t) - 42 = 0$

$$\text{ឬ } 1 - t + 8 + 8t - 3 + 2t - 42 = 0$$

$$\text{ឬ } 9t - 36 = 0 \text{ នោះគេទាញបាន } t = 4 \text{ យកជួសក្នុង(5)នោះ: } \begin{cases} x_k = 1 - 4 = -3 \\ y_k = 2 + 8 = 10 \\ z_k = 3 - 8 = -5 \end{cases}$$

ដូចនេះ $K(-3, 10, -5)$ ។

៥.គណនា MA និង MK រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ AMK ៖

គេមាន $A(1, 2, 3)$, $M(3, 10, 1)$ និង $K(-3, 10, -5)$ ។

គេបាន $\overrightarrow{MA} = (2, 8, -2)$ & $\overrightarrow{MK} = (-6, 0, -6)$

$$\text{នោះ } MA = |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{4 + 64 + 4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{ហើយ } MK = |\overrightarrow{MK}| = \sqrt{36 + 0 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $MA = MK = 6\sqrt{2}$ (ឯកតាប្រវែង)។

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MK} = -12 + 0 + 12 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MK} \text{ និង } MA = MK = 6\sqrt{2}$$

ដូចនេះ AMK ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល M ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

$$\text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិក}(L): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{និងប្លង់}(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$$

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

២. គេសង់ប្លង់ (Q) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ A និងសង់បន្ទាត់ (d) កែងនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំណុច A ដែរ។ ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (d) ។

៣. M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 0$ និងស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (d) ហើយ H និង K ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (Q) រៀងគ្នា។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M, H និង K ។

៤. ចូរស្រាយថាបួនចំណុច M, H, A, K ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

៥. ចូរស្រាយថាចតុកោណ $MHAK$ ជាការេ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P)

តាង $A(x_a, y_a, z_a)$ ។ ដោយ $A \in (L)$ និង $A \in (P)$ គេបាន៖

$$\begin{cases} x_a = 1 + t \\ y_a = 5 - 4t \\ z_a = 4 - t \end{cases} \quad (1) \text{ និង } x_a + 2y_a + 2z_a - 10 = 0 \quad (2)$$

យកសមីការ(1) ជួសក្នុង(2) គេបាន៖

$$(1+t) + 2(5-4t) + 2(4-t) - 10 = 0$$

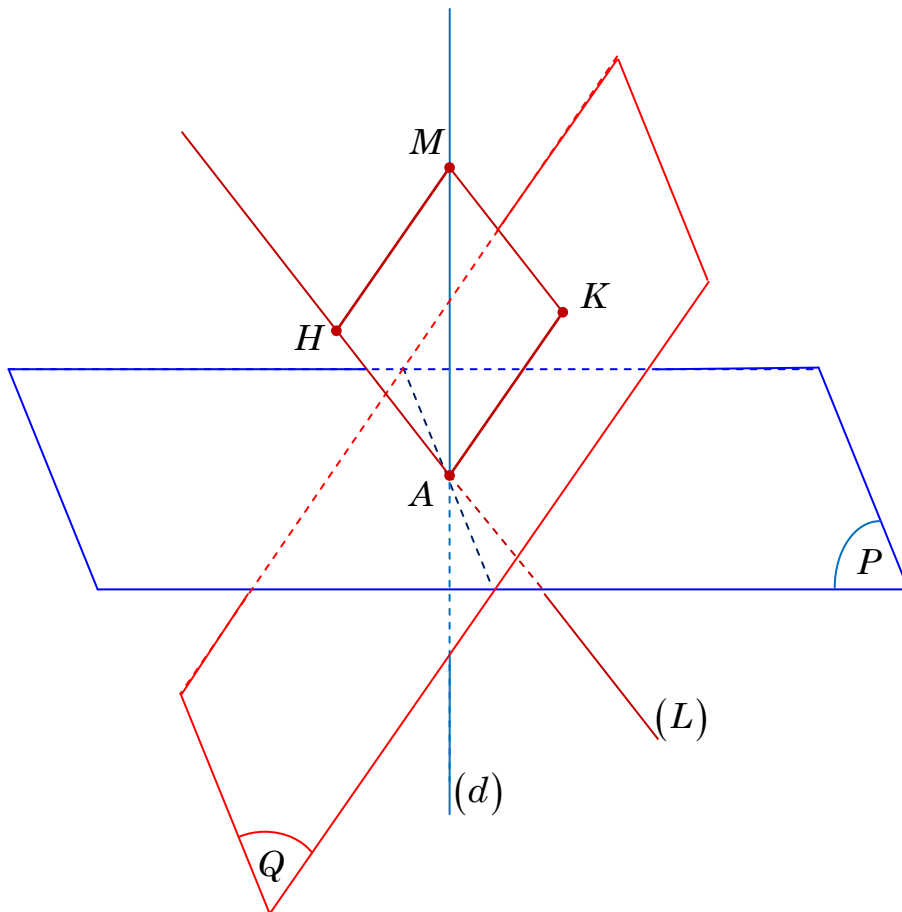
$$1+t+10-8t+8-2t-10=0$$

$$-9t+9=0$$

$$t=1$$

យក $t=1$ ជំនួសក្នុង(1) គេបាន
$$\begin{cases} x_a = 1+1=2 \\ y_a = 5-4=1 \\ z_a = 4-1=3 \end{cases}$$

ដូចនេះ $A(2,1,3)$ ។



២.សរសេរសមីការប្លង់(Q)និងសមីការប្លង់កែងត្រឹមត្រូវបន្ទាត់(d)

ដោយប្លង់(Q)កែងនឹងបន្ទាត់(L)ត្រង់ A នោះវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(L)គឺជា

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(Q) គឺ $\vec{n}_Q = \vec{u}_L = (1, -4, -1)$ ។

សមីការនៃប្លង់(Q) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$$(Q): a(x - x_a) + b(y - y_a) + c(z - z_a) = 0 \text{ ដោយ } A(2, 1, 3)$$

$$1(x - 2) - 4(y - 1) - 1(z - 3) = 0$$

$$x - 2 - 4y + 4 - z + 3 = 0$$

$$x - 4y - z + 5 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ } (Q): x - 4y - z + 5 = 0 \text{ ។}$$

ម្យ៉ាងទៀតដោយបន្ទាត់(d)កែងនឹងប្លង់(P)ត្រង់ចំណុច A ដែរនោះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

នៃប្លង់(P)គឺជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(d)គឺ $\vec{u}_d = \vec{n}_p = (1, 2, 2)$ ។

$$\text{សមីការបន្ទាត់ } (d) \text{ អាចសរសេរតាមរូបមន្ត } (d): \begin{cases} x = x_a + at \\ y = y_a + bt \\ z = z_a + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដោយ } A(2, 1, 3) \text{ ដូចនេះ } (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M, H និង K

ដោយ M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 0$ និងស្ថិតនៅលើបន្ទាត់(d)នោះគេបាន៖

$$\begin{cases} x_m = 2 + t = 0 \\ y_m = 1 + 2t \\ z_m = 3 + 2t \end{cases} \text{ គេទាញបាន } t = -2 \text{ និង } y_m = 1 - 4 = -3, z_m = 3 - 4 = -1 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } M(0, -3, -1) \text{ ។}$$

តាង $H(x_h, y_h, z_h)$ ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើបន្ទាត់(d)

គេបាន $H \in (L)$ សមមូល
$$\begin{cases} x_h = 1 + t \\ y_h = 5 - 4t \quad (3) \text{ និង} \\ z_h = 4 - t \end{cases}$$

គេមាន $\overrightarrow{MH} = (1 + t, 8 - 4t, 5 - t)$ ហើយដោយ $\overrightarrow{MH} \perp (L)$ និង $\overrightarrow{u_L} \parallel (L)$

គេបាន $\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{u_L} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_L} = 0$ ដោយ $\overrightarrow{u_L} = (1, -4, -1)$

នោះ $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_L} = (1 + t) - 4(8 - 4t) - (5 - t) = 0$

$$1 + t - 32 + 16t - 5 + t = 0$$

$$18t - 36 = 0$$

$$t = 2$$

យកតម្លៃ $t = 2$ ជួសក្នុង(3) គេបាន
$$\begin{cases} x_h = 1 + 2 = 3 \\ y_h = 5 - 8 = -3 \\ z_h = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $H(3, -3, 2)$ ។

តាង $K(x_k, y_k, z_k)$ ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើប្លង់ (Q)

គេមាន $K \in (Q)$ សមមូល $x_k - 4y_k - z_k + 5 = 0 \quad (4)$

គេមាន $\overrightarrow{MK} \perp (Q)$ និង $\overrightarrow{n_Q} \perp (Q)$ នោះគេទាញ $\overrightarrow{MK} \parallel \overrightarrow{n_Q}$

សមមូល $\overrightarrow{MK} = \lambda \overrightarrow{n_Q}$ ដោយ $\overrightarrow{MK} = (x_k, y_k + 3, z_k + 1)$ និង $\overrightarrow{n_Q} = (1, -4, -1)$

គេបាន
$$\begin{cases} x_k = \lambda \\ y_k + 3 = -4\lambda \\ z_k + 1 = -\lambda \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} x_k = \lambda \\ y_k = -3 - 4\lambda \quad (5) \\ z_k = -1 - \lambda \end{cases}$$

យក(5) ជួសក្នុង(4) គេបាន $\lambda - 4(-3 - 4\lambda) - (-1 - \lambda) + 5 = 0$

$$\lambda + 12 + 16\lambda + 1 + \lambda + 5 = 0$$

$$\text{គេទាញបាន } \lambda = -\frac{18}{18} = -1 \text{ យកជួសក្នុង(5)គេបាន } \begin{cases} x_k = -1 \\ y_k = -3 + 4 = 1 \\ z_k = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

ដូចនេះ $K(-1, 1, 0)$ ។

៨.ស្រាយថាបួនចំណុច M, H, A, K ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ៖

គេមាន $M(0, -3, -1), H(3, -3, 2), A(2, 1, 3)$ និង $K(-1, 1, 0)$ ។

គេបាន $\overrightarrow{MH} = (3, 0, 3), \overrightarrow{MA} = (2, 4, 4), \overrightarrow{MK} = (-1, 4, 1)$

$$\text{នោះ } (\overrightarrow{MH} \times \overrightarrow{MA}) \cdot \overrightarrow{MK} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3(4 - 16) - 0(2 + 4) + 3(8 + 4)$$

$$= -36 + 0 + 36 = 0$$

គេទាញបាន $\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MK}$ ជាវ៉ិចទ័រកូញ៉ានៃ (ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ)។

ដូចនេះបួនចំណុច M, H, A, K ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

៩.ស្រាយថាចតុកោណ $MHAK$ ជាកាត៖

គេមាន $\overrightarrow{MH} = (3, 0, 3)$ & $\overrightarrow{MK} = (-1, 4, 1)$

គេបាន $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK} = -3 + 0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{MK}$

ហើយ $|\overrightarrow{MH}| = \sqrt{9 + 0 + 9} = 3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{MK}| = \sqrt{1 + 16 + 1} = 3\sqrt{2}$

នោះគេទាញ $MH = MK = 3\sqrt{2}$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $MK \perp AK$ និង $MH \perp AH$

ព្រោះ H & K ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ M លើបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (Q) ។

ដូចនេះចតុកោណ $MHAK$ ជាកាត។

លំហាត់ទី១៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

$$\text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិក}(L): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - t \\ z = 9 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{និងប្លង់}(P): 2x + y - 2z - 6 = 0$$

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

២. គេឲ្យ $B(5, 6, 5)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B \in (P)$ ។

៣. ពីចំណុច B គេគូសបន្ទាត់ (BH) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ដោយ $H \in (L)$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិកនៃបន្ទាត់ (BH) ។

៤. គេយក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I រួចទាញបង្ហាញថា $\overline{IH}$ ជាវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។

៥. K ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃចំណុច H ធៀបនឹងប្លង់ (P) ។ គណនាកូអរដោនេនៃ K រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាចតុកោណ $AHBK$ ជាការេ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P)

តាង $A(x_a, y_a, z_a)$ ។ ដោយ $A \in (L)$ និង $A \in (P)$ គេបាន៖

$$\begin{cases} x_a = 1 + t \\ y_a = 4 - t \\ z_a = 9 - 4t \end{cases} \quad (1) \quad \text{និង} \quad 2x_a + y_a - 2z_a - 6 = 0 \quad (2)$$

យកសមីការ(1)ជំនួសក្នុង(2)គេបាន $2(1+t) + (4-t) - 2(9-4t) - 6 = 0$

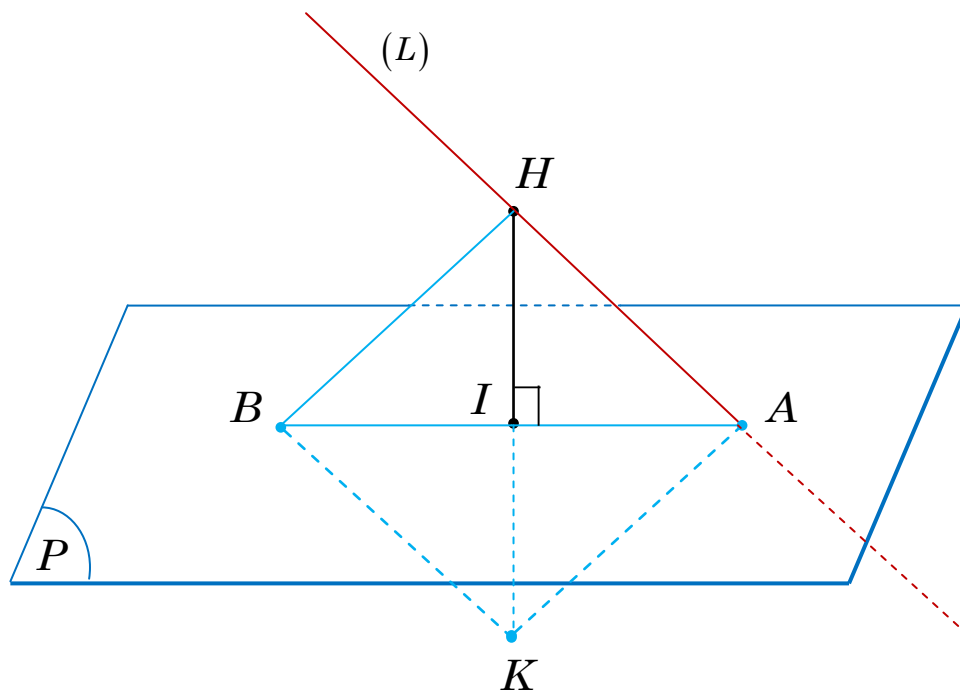
$$\text{ឬ } 2 + 2t + 4 - t - 18 + 8t - 6 = 0$$

$$9t - 18 = 0$$

$$t = 2$$

យក $t = 2$ ជួសក្នុង(1) គេបាន $\begin{cases} x_a = 1 + 2 = 3 \\ y_a = 4 - 2 = 2 \\ z_a = 9 - 8 = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $A(3,2,1)$ ។



២. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B \in (P)$ ៖

គេមាន $B(5,6,5)$ និង $(P): 2x + y - 2z - 6 = 0$ ។

យកកូអរដោនេនៃចំណុច B ទៅជំនួសក្នុងសមីការនៃប្លង់(P) គេបាន៖

$$2(5) + 6 - 2(5) - 6 = 0 \quad \text{ឬ} \quad 0 = 0 \quad \text{ផ្ទៀងផ្ទាត់។}$$

ដូចនេះ $B \in (P)$ ។

៣. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការប្លង់ម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BH)

$$\text{តាង } H(x_h, y_h, z_h) \text{ ដោយ } H \in (L) \text{ នោះ: } \begin{cases} x_h = 1 + t \\ y_h = 4 - t \\ z_h = 9 - 4t \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{BH} = (t - 4, -t - 2, -4t + 4) \text{ ។}$$

$$\text{បន្ទាត់ } (BH) \text{ កែងនឹងបន្ទាត់ } (L) \text{ ហើយ } \overrightarrow{u_L} = (1, -1, -4) \text{ ស្របនឹងបន្ទាត់ } (L)$$

$$\text{គេទាញបាន } \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{u_L} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{u_L} = 0$$

$$\text{សមមូល } (t - 4) - (-t - 2) - 4(-4t + 4) = 0$$

$$\text{សមមូល } t - 4 + t + 2 + 16t - 16 = 0$$

$$\text{សមូល } 18t - 18 = 0 \text{ នោះ } t = 1 \text{ យកជួសក្នុង(1)គេបាន } \begin{cases} x_h = 1 + 1 = 2 \\ y_h = 4 - 1 = 3 \\ z_h = 9 - 4 = 5 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ } H(2, 3, 5) \text{ ។}$$

៤. គណនាកូអរដោនេនៃ I រួចទាញបង្ហាញថា $\overrightarrow{IH}$ ជារ៉ឺចន័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

$$\text{គេមាន } A(3, 2, 1) \text{ និង } B(5, 6, 5)$$

$$\text{ដោយ } I \text{ ជាចំណុចកណ្តាលនៃ } [AB] \text{ នោះ } I\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$$

$$\text{ដូចនេះ } I(4, 4, 3) \text{ ។}$$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀតគេមាន } H(2, 3, 5) \text{ និង } I(4, 4, 3) \text{ នោះ } \overrightarrow{IH} = (2, 1, -2)$$

$$\text{ដោយ } (P): 2x + y - 2z - 6 = 0 \text{ នោះ } \overrightarrow{n_p} = (2, 1, -2) = \overrightarrow{IH} \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } \overrightarrow{IH} \text{ ជារ៉ឺចន័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ } (P) \text{ ។}$$

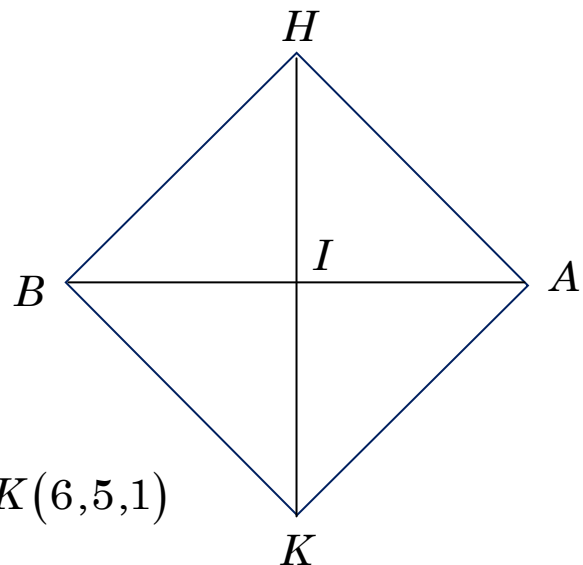
៥.គណនាកូអរដោនេនៃ K ៖

K ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃចំណុច H ធៀបនឹងប្លង់ (P) ហើយ $\overline{IH} \perp (P)$ នោះគេទាញបាន I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[HK]$ ។

$$\text{ហេតុនេះ: } \begin{cases} x_k = 2x_I - x_h \\ y_k = 2y_I - y_h \\ z_k = 2z_I - z_h \end{cases} \text{ ដោយ } H(2,3,5) \text{ និង } I(4,4,3)$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} x_k = 8 - 2 = 6 \\ y_k = 8 - 3 = 5 \\ z_k = 6 - 5 = 1 \end{cases} \quad \text{។ ដូចនេះ: } K(6,5,1) \quad \text{។}$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថាចតុកោណ $AHBK$ ជាកាវ៖



$$A(3,2,1), H(2,3,5), B(5,6,5) \text{ និង } K(6,5,1)$$

$$\overline{AB} = (2,4,4) \quad \text{និង} \quad \overline{HK} = (4,2,-4)$$

$$\text{គេបាន } |\overline{AB}| = \sqrt{4+16+16} = 6, |\overline{HK}| = \sqrt{16+4+16} = 6 \text{ នោះ: } AB = HK$$

$$\text{ហើយ } \overline{AB} \cdot \overline{HK} = 8 + 8 - 16 = 0 \Leftrightarrow \overline{AB} \perp \overline{HK} \quad \text{។}$$

ចតុកោណ $AHBK$ មានអង្កត់ទ្រូង AB & HK ស្មើគ្នានិងកែងគ្នាវាជាកាវ។

ដូចនេះចតុកោណ $AHBK$ ជាកាវ។

លំហាត់ទី១៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1, 2, 3), B(3, 6, -1), C(4, 3, 3)$ និង $D(2, 1, 1)$ ។

១. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរ (S) មានអង្កត់ធ្នឹត $[AB]$ ។

២. បង្ហាញថា $C \in (S)$ និង $D \in (S)$ ។ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (CD) ។

៣. សរសេរសមីការប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាមចំណុចរៀងគ្នា C និង D

ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overline{AB}$ ។

៤. ចូរបង្ហាញថាបួនចំណុច A, B, C, D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

៥. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរ (S) មានអង្កត់ធ្នឹត $[AB]$

គេមាន $A(1, 2, 3), B(3, 6, -1), C(4, 3, 3)$ និង $D(2, 1, 1)$

តាង I ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ (S) នោះវាជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

តាមរូបមន្តកូអរដោនេនៃចំណុចកណ្តាល $I\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}, \frac{z_a + z_b}{2}\right)$

គេបាន $I(2, 4, 1)$ ហើយ $R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(3-1)^2 + (6-2)^2 + (-1-3)^2} = 3$ ។

សមីការស្វ៊ែរអាចសរសេរតាមរូបមន្ត $(S): (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = R^2$

ដូចនេះ $(S): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 9$ ។

២.បង្ហាញថា $C \in (S)$ និង $D \in (S)$ ៖

គេមាន $C(4,3,3)$ និង $D(2,1,1)$ និង $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 9$

ចំពោះ $C(4,3,3)$ នោះ $(4-2)^2 + (3-4)^2 + (3-1)^2 = 9$

$$4 + 1 + 4 = 9 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

ដូចនេះ $C \in (S)$ ។

ចំពោះ $D(2,1,1)$ នោះ $(2-2)^2 + (1-4)^2 + (1-1)^2 = 9$

$$0 + 9 + 0 = 9 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

ដូចនេះ $D \in (S)$

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (CD) ៖

បន្ទាត់ (CD) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD} = (-2, -2, -2)$ និងកាត់តាម $C(4,3,3)$

$$\text{តាមរូបមន្ត } (CD): \begin{cases} x = x_c + at \\ y = y_c + bt \\ z = z_c + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ } (CD): \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ៖

គេមាន $A(1,2,3)$ និង $B(3,6,-1)$ នោះ $\overrightarrow{AB} = (2,4,-4)$

សរសេរសមីការប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាមចំណុចរៀងគ្នា C និង D

ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ អាចសរសេរ៖

$$(P): 2(x-4) + 4(y-3) - 4(z-3) = 0$$

$$2x - 8 + 4y - 12 - 4z + 12 = 0$$

$$2x + 4y - 4z - 8 = 0$$

$$x + 2y - 2z - 4 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } (P): x + 2y - 2z - 4 = 0 \text{ ។}$$

$$\text{ហើយ } (Q): 2(x-2) + 4(y-1) - 4(z-1) = 0$$

$$2x - 4 + 4y - 4 - 4z + 4 = 0$$

$$2x + 4y - 4z - 4 = 0$$

$$x + 2y - 2z - 2 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } (Q): x + 2y - 2z - 2 = 0 \text{ ។}$$

៨. បង្ហាញថាប្លង់ចំណុច A, B, C, D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ៖

គេមាន $A(1, 2, 3), B(3, 6, -1), C(4, 3, 3)$ និង $D(2, 1, 1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -4), \overrightarrow{AC} = (3, 1, 0), \overrightarrow{AD} = (1, -1, -2)$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2-0) - 4(-6-0) - 4(-3-1)$$

$$= -4 + 24 + 12 = 32$$

ដោយ $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ មិនកូញានៃ។

ដូចនេះ A, B, C, D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

៩. គណនាមាឌត្រីកោណ $ABCD$ ៖

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} \text{ (ឯកតាមាឌ) ។}$$

លំហាត់ទី១៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(3, -4, -2), B(1, 0, -5), C(5, -2, -5)$ និង $D(4, -2, 0)$ ។

១. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overline{AB} \times \overline{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A, B, C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

២. គណនា $\overline{AD}$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overline{AD} = -\frac{1}{6} \overline{AB} \times \overline{AC}$ ។ គណនារង្វាស់ AD រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $ABCD$ ។

៣. គណនា $\overline{OB}$ និង $\overline{DC}$ រួចទាញថា $OBCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៤. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) គូសចេញពីគល់ O ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ H ។

៥. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចបង្ហាញថា $AHBC$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ

គេមាន $A(3, -4, -2), B(1, 0, -5), C(5, -2, -5)$ និង $D(4, -2, 0)$

នោះ $\overline{AB} = (-2, 4, -3)$, $\overline{AC} = (2, 2, -3)$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 12\vec{j} - 12\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overline{AB} \times \overline{AC} = (-6, -12, -12)$ ។

ទាញថាបីចំណុចមិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ & $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែរ។

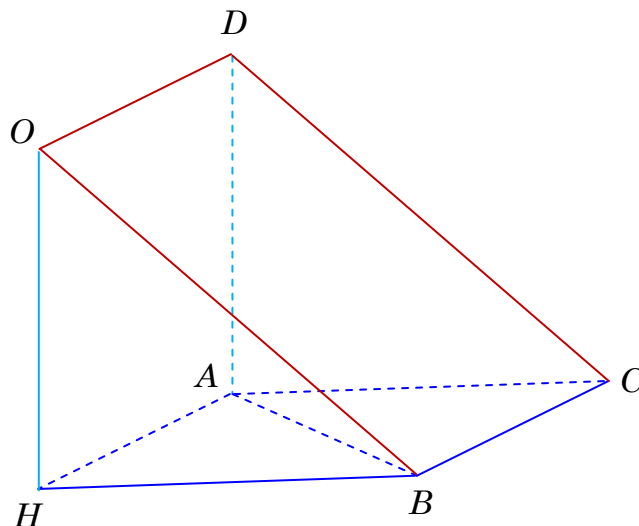
ដូច្នេះបីចំណុច A, B, C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ៖

តាមរូបមន្ត $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, -12, -12)$

នោះ $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-12)^2 + (-12)^2} = \sqrt{36 + 144 + 144} = \sqrt{324} = 18$

ដូចនេះ $S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 18 = 9$ (ឯកតាផ្ទៃ)។



២.គណនា $\overrightarrow{AD}$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ៖

យើងមាន $A(3, -4, -2)$ និង $D(4, -2, 0)$ នោះ $\overrightarrow{AD} = (1, 2, 2)$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, -12, -12)$ នោះ $-\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 2, 2)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ។

គណនាផ្ទៃស្រទាប់ AD រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ៖

យើងមាន $\overrightarrow{AD} = (1, 2, 2)$ នោះយើងបាន $AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$

ដូចនេះ $AD = 3$ (ឯកតាប្រវែង)។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ នោះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -6\overrightarrow{AD}$

តាមរូបមន្តមាឌ $V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |(-6\overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AD}|^2 = AD^2$

ដូចនេះ $V_{ABCD} = 3^2 = 9$ (ឯកតាមាឌ)។

៣.គណនា $\overrightarrow{OB}$ និង $\overrightarrow{DC}$ រួចទាញថា $OBCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម៖

គេមាន $O(0, 0, 0), B(1, 0, -5), C(5, -2, -5)$ និង $D(4, -2, 0)$

យើងបាន $\overrightarrow{OB} = (1, 0, -5)$ និង $\overrightarrow{DC} = (1, 0, -5)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} OB = DC \\ OB \parallel DC \end{cases}$

ដូចនេះចតុកោណ $OBCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៤.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប្លង់រ៉ាំរ៉ៃម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ៖

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, -12, -12)$ ហើយកាត់

តាមចំណុច $A(3, -4, -2)$ អាចសរសេរ ៖

$$(ABC): a(x - x_a) + b(y - y_a) + c(z - z_a) = 0$$

$$-6(x - 3) - 12(y + 4) - 12(z + 2) = 0$$

$$-6x + 18 - 12y - 48 - 12z - 24 = 0$$

$$-6x - 12y - 12z - 54 = 0$$

$$x + 2y + 2z + 9 = 0$$

ដូចនេះ $(ABC): x + 2y + 2z + 9 = 0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោះបន្ទាត់(d) គូសចេញពីគល់ O ហើយកែងនឹងប្លង់(ABC) នោះ គេបាន $\vec{u_d} = \vec{n} = (1, 2, 2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនិង $O(0, 0, 0)$ ជាចំណុចកាត់តាម

$$\text{តាមរូបមន្ត } (d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{។ ដូចនេះ } (d): \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

៥. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ៖

$$\text{ចំណុច } H \text{ គឺជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ } (d): \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ និងប្លង់ } (ABC)$$

ដែលមានសមីការ (ABC): $x + 2y + 2z + 9 = 0$ ។

យកសមីការ(d) ជំនួសក្នុង(ABC)គេបាន $t + 4t + 4t + 9 = 0$ ឬ $t = -1$ ។

យក $t = -1$ ជំនួសក្នុងសមីការ(d) គេបាន $x = -1, y = -2, z = -2$ ។

ដូចនេះ $H(-1, -2, -2)$ ។

បង្ហាញថាចតុកោណ $AHBC$ ជាប្រលេឡូក្រាម៖

គេមាន $A(3, -4, -2), B(1, 0, -5), C(5, -2, -5)$ និង $H(-1, -2, -2)$

គេបាន $\vec{CA} = (-2, -2, 3)$ និង $\vec{BH} = (-2, -2, 3)$ ។

ដោយ $\vec{CA} = \vec{BH}$ នាំឲ្យ $CA = BH$ និង $CA \parallel BH$ ។

ដូចនេះចតុកោណ $AHBC$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(2, -3, 4), B(3, 1, 3), C(-1, 0, 4)$ និងប្លង់ $(P): x - 2y + 2z - 7 = 0$ ។

១. គណនា AB, AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

២. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B \in (P)$ និង $C \in (P)$ ។ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (BC) ។

៣. H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) ។ គណនាកូអរដោនេនៃ H ។

៤. គេតាង $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$, $\vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$ និង $\vec{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$ ។

ចូរស្រាយថា $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន។

៥. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ $(HAB), (HAC)$ និង (HBC) ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា AB, AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស៖

គេមាន $A(2, -3, 4), B(3, 1, 3), C(-1, 0, 4)$

យើងបាន $AB = \sqrt{(3-2)^2 + (1+3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ។

$$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (0+3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ដោយ $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

២.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B \in (P)$ និង $C \in (P)$ ៖

គេមាន $B(3,1,3), C(-1,0,4)$ និងប្លង់ $(P): x - 2y + 2z - 7 = 0$ ។

ចំពោះ $B(3,1,3)$ នោះ $3 - 2 + 6 - 7 = 0$

$$0 = 0 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

ដូចនេះ $B \in (P)$ ។

ចំពោះ $C(-1,0,4)$ នោះ $-1 + 0 + 8 - 7 = 0$

$$0 = 0 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

ដូចនេះ $C \in (P)$ ។

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (BC) ៖

បន្ទាត់ (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC} = (-4, -1, 1)$ និងកាត់តាម $B(3,1,3)$

$$\text{តាមរូបមន្ត } (BC): \begin{cases} x = x_b + at \\ y = y_b + bt \\ z = z_b + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ } (BC): \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

៣.គណនាកូអរដោនេនៃ H ៖

តាង $H(x_h, y_h, z_h)$ ។ ដោយ H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) នោះ

$\overrightarrow{AH} \perp (P)$ ដោយ $\overrightarrow{n_p} \perp (P)$ ដែល នោះ $\overrightarrow{AH} // \overrightarrow{n_p}$

គេទាញ $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{n_p}$ ដោយ $\overrightarrow{AH} = (x_h - 2, y_h + 3, z_h - 4)$ និង $\overrightarrow{n_p} = (1, -2, 2)$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} x_h - 2 = \lambda \\ y_h + 3 = -2\lambda \\ z_h - 4 = 2\lambda \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} x_h = 2 + \lambda \\ y_h = -3 - 2\lambda \\ z_h = 4 + 2\lambda \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀត } H \in (P) \text{ សមមូល } (2 + \lambda) - 2(-3 - 2\lambda) + 2(4 + 2\lambda) - 7 = 0$$

$$\text{ឬ } 2 + \lambda + 6 + 4\lambda + 8 + 4\lambda - 7 = 0$$

$$9\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda = -1$$

$$\text{យក } \lambda = -1 \text{ ជួសក្នុង(1) នោះ } \begin{cases} x_h = 2 - 1 = 1 \\ y_h = -3 + 2 = -1 \\ z_h = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ } H(1, -1, 2) \text{ ។}$$

៤. ស្រាយថា $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន៖

$$\text{គេមាន } \vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}, \vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC} \text{ និង } \vec{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$$

$$\text{ដោយ } A(2, -3, 4), B(3, 1, 3), C(-1, 0, 4) \text{ និង } H(1, -1, 2)$$

$$\text{នោះ } \overrightarrow{HB} = (2, 2, 1), \overrightarrow{HC} = (-2, 1, 2) \text{ និង } \overrightarrow{HA} = (1, -2, 2)$$

$$\text{គេបាន } \vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \vec{w} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{គេមាន } |\vec{u}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = 1, |\vec{v}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1, |\vec{w}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

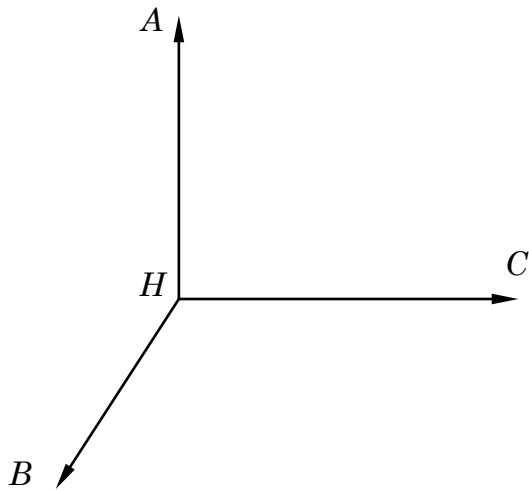
$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 0 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \\ \vec{v} \perp \vec{w} \end{cases}$$

គេទាញបាន $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតានិងអរតូកូណាល់គ្នាពីរៗ។

$$\text{ម្យ៉ាងទៀត } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k} = \vec{w} \text{ ។}$$

សរុបមកយើងសន្និដ្ឋានថា $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន។

៥. សរសេរសមីការប្លង់ $(HAB), (HAC)$ និង (HBC)



ប្លង់ $(HAB), (HAC)$ និង (HBC) កាត់តាមចំណុច $H(1, -1, 2)$ និងមានវ៉ិចទ័រ

នរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \vec{w} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ មានសមីការ៖

$$(HAB): -\frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y+1) + \frac{2}{3}(z-2) = 0 \text{ ឬ } -2x + y + 2z - 1 = 0$$

$$(HAC): \frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y+1) + \frac{1}{3}(z-2) = 0 \text{ ឬ } 2x + 2y + z - 2 = 0$$

$$(HBC): \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{3}(y+1) + \frac{2}{3}(z-2) = 0 \text{ ឬ } x - 2y + 2z - 7 = 0$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$S(3,4,4)$, $A(2,6,2)$, $B(-1,3,5)$ និង $C(3,1,1)$ ។

១.គណនា AB, AC , SB និង SC រួចទាញរកប្រភេទត្រីកោណ ABC & SBC ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$ ។

៣.ស្រាយបញ្ជាក់ថាប្លង់ (P) កាត់តាម S ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{SA}$ មានសមីការ

$$x - 2y + 2z - 3 = 0 \quad ?$$

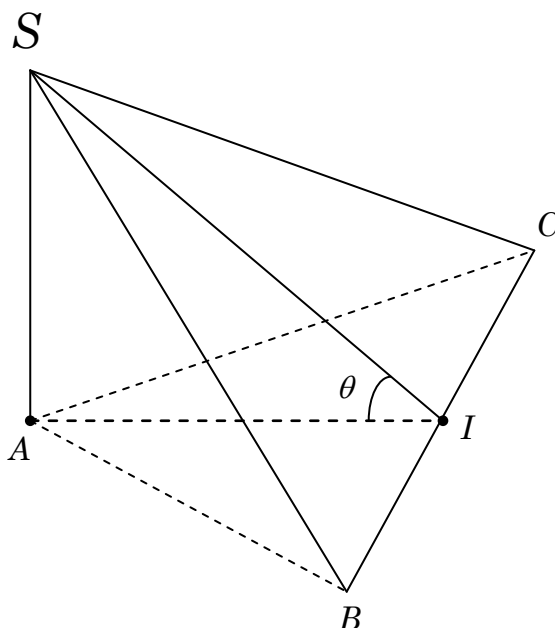
៤.តាង I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I ។

សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (Q) នៃអង្កត់ $[BC]$ ។

៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $A \in (Q)$ និង $S \in (Q)$ ។ គណនារង្វាស់មុំ $\angle SIA$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា AB, AC , SB និង SC រួចទាញរកប្រភេទត្រីកោណ ABC & SBC ៖



គេមាន $S(3,4,4)$, $A(2,6,2)$, $B(-1,3,5)$ និង $C(3,1,1)$

គេបាន $AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-6)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (1-6)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$SB = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$SC = \sqrt{(3-3)^2 + (4-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $AB = AC = 3\sqrt{3}$ (ឯកតាប្រវែង)

និង $SB = SC = 3\sqrt{2}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ដោយ $AB = AC$ និង $SB = SC$ នោះត្រីកោណ ABC និងត្រីកោណ SBC

សុទ្ធតែជាត្រីកោណសមបាតមានកំពូល A និង S រៀងគ្នា។

២.គណនាផលគុណស្កាលែន $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$

គេមាន $S(3,4,4)$, $A(2,6,2)$, $B(-1,3,5)$ និង $C(3,1,1)$

គេបាន $\overrightarrow{SA} = (-1,2,-2)$, $\overrightarrow{AB} = (-3,-3,3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,-5,-1)$

យើងបាន $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 - 6 - 6 = -9$ និង $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 - 10 + 2 = -9$

៣.ស្រាយបញ្ជាក់ថាប្លង់ (P) មានសមីការ $x - 2y + 2z - 3 = 0$

ប្លង់ (P) កាត់តាម $S(3,4,4)$ ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{SA} = (-1,2,-2)$ សរសេរ៖

$$(P): a(x - x_s) + b(y - y_s) + c(z - z_s) = 0$$

$$-(x - 3) + 2(y - 4) - 2(z - 4) = 0 \quad \text{ឬ} \quad -x + 2y - 2z + 3 = 0$$

ដូចនេះ $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I

ដោយ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ នោះ $I\left(\frac{x_b + x_c}{2}, \frac{y_b + y_c}{2}, \frac{z_b + z_c}{2}\right)$

ដោយ $B(-1,3,5)$ និង $C(3,1,1)$ នោះ $I\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$

ដូចនេះ ។

សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (Q) នៃអង្កត់ $[BC]$ ៖

ប្លង់មេដ្យាទ័រ (Q) នៃ $[BC]$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{BC} = (4, -2, -4)$ និងកាត់តាមចំណុច $I(1,2,3)$ កណ្តាលនៃអង្កត់ $[BC]$ អាចសរសេរ ៖

$$(Q): a(x - x_i) + b(y - y_i) + c(z - z_i) = 0$$

$$4(x - 1) - 2(y - 2) - 4(z - 3) = 0$$

$$4x - 4 - 2y + 4 - 4z + 12 = 0$$

$$4x - 2y - 4z + 12 = 0$$

$$2x - y - 2z + 6 = 0$$

ដូចនេះ $(Q): 2x - y - 2z + 6 = 0$ ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $A \in (Q)$ និង $S \in (Q)$ ៖

យើងមាន $A(2,6,2)$, $S(3,4,4)$ និង $(Q): 2x - y - 2z + 6 = 0$

យកកូអរដោនេ A ជួសក្នុង (Q) គេបាន $4 - 6 - 4 + 6 = 0$ ពិតនោះ $A \in (Q)$

យកកូអរដោនេ S ជួសក្នុង (Q) គេបាន $6 - 4 - 8 + 6 = 0$ ពិតនោះ $S \in (Q)$

ដូចនេះ $A \in (Q)$ និង $S \in (Q)$ ។

គណនារង្វាស់មុំ $\angle SIA$ ៖

តាង $\angle SIA = \theta$ នោះ θ ជាមុំផ្គុំដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{IA}$ និង $\overrightarrow{IS}$ ។

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IS} = |\overrightarrow{IA}| \cdot |\overrightarrow{IS}| \cos \theta \text{ នោះ } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IS}}{|\overrightarrow{IA}| \cdot |\overrightarrow{IS}|}$$

ដោយ $I(1, 2, 3)$, $A(2, 6, 2)$ និង $S(3, 4, 4)$ នោះគេបាន $\overrightarrow{IA} = (1, 4, -1)$

និង $\overrightarrow{IS} = (2, 2, 1)$ ។

$$\text{គេបាន } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IS}}{|\overrightarrow{IA}| \cdot |\overrightarrow{IS}|} = \frac{2 + 8 - 1}{\sqrt{1 + 16 + 1} \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

ដូចនេះ $\angle SIA = 45^\circ$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៨

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(2, 3, -1), B(-1, 0, -1), C(5, 3, 5)$ និង $D(8, 6, 5)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និង (CD) ។

៣. H ជាចំណោលកែងនៃ A លើ BC ហើយ K ជាចំណោលកែងនៃ H លើ CD ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K ។

៤.គណនា AH និង BC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $ABCD$ ។

៥.ចូរស្រាយថា KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាត។

៦.រកកូអរដោនេនៃចំណុច L ដោយដឹងថា $HKCL$ ជាការេ។

តើចំណុច B, L, D តែ្រងត្នាឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ៖

គេមាន $A(2, 3, -1), B(-1, 0, -1), C(5, 3, 5)$ និង $D(8, 6, 5)$

យើងបាន $\overrightarrow{AD} = (6, 3, 6)$ និង $\overrightarrow{BC} = (6, 3, 6)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ នោះ $AD = BC$ និង $AD // BC$ ។

ដូចនេះ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

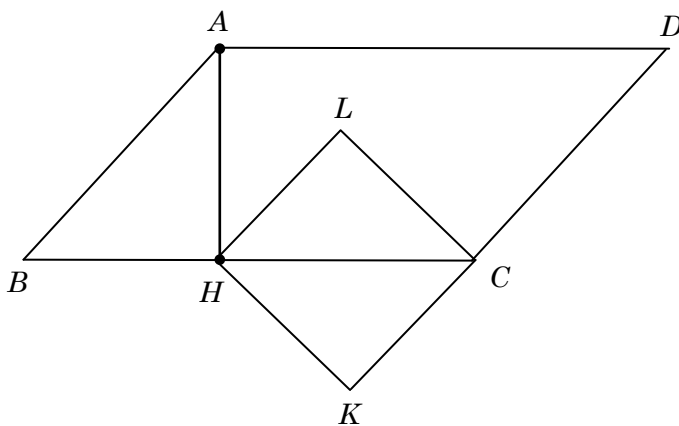
២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និង (CD) ៖

បន្ទាត់ (BC) និង (CD) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC} = (6, 3, 6)$ និង $\overrightarrow{CD} = (3, 3, 0)$

ហើយកាត់តាមចំណុចរៀងគ្នា $B(-1, 0, -1)$ និង $C(5, 3, 5)$ ។

$$\text{ដូចនេះ } (BC): \begin{cases} x = -1 + 6t_1 \\ y = 3t_1 \\ z = -1 + 6t_1 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R} \quad \text{និង} \quad (CD): \begin{cases} x = 5 + 3t_2 \\ y = 3 + 3t_2 \\ z = 5 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}$$

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K



យើងតាង $H(x_h, y_h, z_h)$ ជាចំណោលកែងនៃចំណុច A លើ BC នោះ $H \in (BC)$ និង $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

$$\text{ដោយ } H \in (BC) \text{ សមមូល } \begin{cases} x_h = -1 + 6t_1 \\ y_h = 3t_1 \\ z_h = -1 + 6t_1 \end{cases} \quad (1)$$

គេមាន $A(2, 3, -1)$ នោះ $\overrightarrow{AH} = (6t_1 - 3, 3t_1 - 3, 6t_1)$ និង $\overrightarrow{BC} = (6, 3, 6)$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 6(6t_1 - 3) + 3(3t_1 - 3) + 36t_1 = 0$$

$$\text{សមមូល } 36t_1 - 18 + 9t_1 - 9 + 36t_1 = 0$$

$$\text{សមមូល } 81t_1 - 27 = 0 \text{ ឬ } t_1 = \frac{1}{3} \text{ យកជួសក្នុង(1)គេបាន } \begin{cases} x_h = -1 + 2 = 1 \\ y_h = 1 \\ z_h = -1 + 2 = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $H(1,1,1)$ ។

តាង $K(x_k, y_k, z_k)$ ជាចំណោលកែងនៃចំណុច H លើ (CD) នោះ $K \in (CD)$

និង $\overrightarrow{HK} \perp \overrightarrow{CD}$ ។

$$\text{ដោយ } K \in (CD) \text{ សមមូល } \begin{cases} x_k = 5 + 3t_2 \\ y_k = 3 + 3t_2 \\ z_k = 5 \end{cases} \quad (2)$$

គេមាន $H(1,1,1)$ នោះ $\overrightarrow{HK} = (3t_2 + 4, 3t_2 + 2, 4)$ និង $\overrightarrow{CD} = (3, 3, 0)$

គេបាន $\overrightarrow{HK} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{CD} = 3(3t_2 + 4) + 3(3t_2 + 2) = 0$

$$\text{សមមូល } 9t_2 + 12 + 9t_2 + 6 = 0$$

$$\text{សមមូល } 18t_2 + 18 = 0 \text{ ឬ } t_2 = -1 \text{ យកជួសក្នុង(1)គេបាន } \begin{cases} x_k = 5 - 3 = 2 \\ y_k = 3 - 3 = 0 \\ z_k = 5 \end{cases}$$

ដូចនេះ $K(2,0,5)$ ។

៤.គណនា AH និង BC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $ABCD$ ៖

យើងមាន $A(2,3,-1), H(1,1,1), B(-1,0,-1), C(5,3,5)$

$$\text{យើងបាន } AH = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$BC = \sqrt{(5+1)^2 + (3-0)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{36+9+36} = \sqrt{81} = 9$$

ដូចនេះ $AH = 3, BC = 9$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ គឺ $S = AH \times BC = 3 \times 9 = 27$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

៥.ស្រាយថា KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាត៖

គេមាន $K(2,0,5)$, $C(5,3,5)$ និង $H(1,1,1)$

គេបាន $\overrightarrow{KC} = (3,3,0)$ និង $\overrightarrow{KH} = (-1,1,-4)$

ដោយ $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KH} = -3 + 3 + 0 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{KC} \perp \overrightarrow{KH}$

ហើយ $KC = \sqrt{9+9+0} = 3\sqrt{2}$, $KH = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$ នោះ $KC = KH$

ដូចនេះត្រីកោណ KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល K ។

៦.រកកូអរដោនេនៃចំណុច L ដោយដឹងថា $HKCL$ ជាការេ៖

គេមាន KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល K នោះ $HKCL$ ជាការេលុះត្រា

តែ $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{KC}$ សមមូល $\begin{cases} x_l - 1 = 3 \\ y_l - 1 = 3 \\ z_l - 1 = 0 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x_l = 4 \\ y_l = 4 \\ z_l = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $L(4,4,1)$ ។

តើចំណុច B, L, D រត់ត្រង់គ្នាឬទេ ?

គេមាន $B(-1,0,-1)$, $L(4,4,1)$ និង $D(8,6,5)$

គេបាន $\overrightarrow{BL} = (5,4,2)$ និង $\overrightarrow{BD} = (9,6,6)$

ដោយ $\frac{5}{9} \neq \frac{4}{6} \neq \frac{2}{6}$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BL}$ និង $\overrightarrow{BD}$ មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា។

ដូចនេះបីចំណុច B, L, D មិនរត់ត្រង់គ្នាទេ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(-4, 1, -2)$, $B(-1, 7, 4)$ និង $C(4, -7, 2)$ ។

១.គណនា AB, AC និង BC រួចទាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $BC \cdot \overrightarrow{IA} + AC \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ ។

៥.គេឲ្យចំណុច $M(x, y, z)$ នៃលំហ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$BC \cdot MA^2 + AC \cdot MB^2 + AB \cdot MC^2 = (BC + AC + AB) MI^2 + BC \cdot AC \cdot AB$$

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា AB, AC និង BC រួចទាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង៖

គេមាន $A(-4, 1, -2)$, $B(-1, 7, 4)$ និង $C(4, -7, 2)$

យើងបាន $AB = \sqrt{(-1+4)^2 + (7-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9$

$$AC = \sqrt{(4+4)^2 + (-7-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (-7-7)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{25+196+4} = \sqrt{225} = 15$$

ដូចនេះ $AB = 9, AC = 12, BC = 15$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225 = BC^2$ (តាមពីតាក័រ)

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A ។

២. កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

គេមាន $A(-4, 1, -2)$, $B(-1, 7, 4)$ និង $C(4, -7, 2)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (3, 6, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (8, -8, 4)$

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 6 \\ 8 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 72\vec{i} - 36\vec{j} - 72\vec{k}$$

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរ៖

$$(ABC): a(x - x_a) + b(y - y_a) + c(z - z_a) = 0$$

$$72(x + 4) - 36(y - 1) - 72(z + 2) = 0$$

$$2x + 8 - y + 1 - 2z - 4 = 0$$

$$2x - y - 2z + 5 = 0$$

ដូចនេះ $(ABC): 2x - y - 2z + 5 = 0$ ។

៣. រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $BC \cdot \overrightarrow{IA} + AC \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{តាង } I(x_i, y_i, z_i) \text{ នោះ: } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (-4 - x_i, 1 - y_i, -2 - z_i) \\ \overrightarrow{IB} = (-1 - x_i, 7 - y_i, 4 - z_i) \\ \overrightarrow{IC} = (4 - x_i, -7 - y_i, 2 - z_i) \end{cases}$$

ដោយ $AB = 9, AC = 12, BC = 15$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} BC \cdot \overrightarrow{IA} = (-60 - 15x_i, 15 - 15y_i, -30 - 15z_i) \\ AC \cdot \overrightarrow{IB} = (-12 - 12x_i, 84 - 12y_i, 48 - 12z_i) \\ AB \cdot \overrightarrow{IC} = (36 - 9x_i, -63 - 9y_i, 18 - 9z_i) \end{cases}$$

$$\text{តាង } \vec{S} = BC.\vec{IA} + AC.\vec{IB} + AB.\vec{IC}$$

$$\text{គេបាន } \vec{S} = (-36 - 36x_i, 36 - 36y_i, 36 - 36z_i)$$

$$\text{ដោយ } \vec{S} = BC.\vec{IA} + AC.\vec{IB} + AB.\vec{IC} = \vec{O} \text{ សមមូល } \begin{cases} -36 - 36x_i = 0 \\ 36 - 36y_i = 0 \\ 36 - 36z_i = 0 \end{cases}$$

$$\text{គេទាញ } x_i = -1, y_i = 1, z_i = 1 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } I(-1, 1, 1) \text{ ។}$$

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ ៖

$$\text{គេមាន } A(-4, 1, -2), B(-1, 7, 4) \text{ និង } C(4, -7, 2)$$

បន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា ៖

$$\vec{IA} = (-3, 0, -3), \vec{IB} = (0, 6, 3) \text{ និង } \vec{IC} = (5, -8, 1) \text{ ។}$$

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ អាចសរសេរដូចតទៅ៖

$$(IA): \begin{cases} x = -4 - 3t_1 \\ y = 1 \\ z = -2 - 3t_1 \end{cases}, (IB): \begin{cases} x = -1 \\ y = 7 + 6t_2 \\ z = 4 + 3t_2 \end{cases}, (IC): \begin{cases} x = 4 + 5t_3 \\ y = -7 - 8t_3 \\ z = 2 + t_3 \end{cases}$$

$$\text{ដែល } t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

៥.ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$BC.MA^2 + AC.MB^2 + AB.MC^2 = (BC + AC + AB)MI^2 + BC.AC.AB$$

$$\text{គេមាន } A(-4, 1, -2), B(-1, 7, 4) \text{ និង } C(4, -7, 2)$$

$$M(x, y, z), I(-1, 1, 1) \text{ និង } AB = 9, AC = 12, BC = 15$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} MA^2 = (-4-x)^2 + (1-y)^2 + (-2-z)^2 \\ MB^2 = (-1-x)^2 + (7-y)^2 + (4-z)^2 \\ MC^2 = (4-x)^2 + (-7-y)^2 + (2-z)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} MA^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y + 4z + 21 \\ MB^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 14y - 8z + 66 \\ MC^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 14y - 4z + 69 \end{cases}$$

$$\begin{cases} BC.MA^2 = 15x^2 + 15y^2 + 15z^2 + 120x - 30y + 60z + 315 \\ AC.MB^2 = 12x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 24x - 168y - 96z + 792 \\ AB.MC^2 = 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 72x + 126y - 36z + 621 \end{cases}$$

បូកសមីការនេះអង្គនិងអង្គគេបាន៖

$$BC.MA^2 + AC.MB^2 + AB.MC^2 = 36(x^2 + y^2 + z^2) + 72(x - y - z) + 1728 \quad (i)$$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀតគេមាន } MI^2 = (-1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2$$

$$\text{ឬ } MI^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z + 3$$

$$\text{ដោយ } AB=9, AC=12, BC=15 \text{ នោះ } \begin{cases} BC + AC + AB = 36 \\ BC.AC.AB = 1620 \end{cases} \text{ នោះគេបាន ៖}$$

$$(BC + AC + AB)MI^2 + BC.AC.AB = 36(x^2 + y^2 + z^2) + 72(x - y - z) + 1728 \quad (ii) \text{ តាម (i) និង (ii) គេបានទំនាក់ទំនង ៖}$$

$$BC.MA^2 + AC.MB^2 + AB.MC^2 = (BC + AC + AB)MI^2 + BC.AC.AB$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២០

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(1, -1, -3)$, $B(2, -3, -1)$ និង $C(4, 1, 3)$ ។

១.គណនា AB, AC និង BC ។

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I កណ្តាលអង្កត់ $[BC]$ រួចសរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[BC]$ ។

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (ID) ។

៥.សរសេរសមីការស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត I និងកាំ $r = AB$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា AB, AC និង BC ៖

យើងមាន $A(1, -1, -3)$, $B(2, -3, -1)$ និង $C(4, 1, 3)$

យើងបាន $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-3+1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (1+1)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{9+4+36} = 7$$

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (1+3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

ដូចនេះ $AB = 3$, $AC = 7$, $BC = 6$ (ឯកតាប្រវែង)

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម៖

ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមលុះត្រាតែ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

តាង $D(x_d, y_d, z_d)$ ដោយ $A(1, -1, -3)$, $B(2, -3, -1)$ និង $C(4, 1, 3)$

គេបាន $\overrightarrow{AD} = (x_d - 1, y_d + 1, z_d + 3)$ និង $\overrightarrow{BC} = (2, 4, 4)$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_d - 1 = 2 \\ y_d + 1 = 4 \\ z_d + 3 = 4 \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} x_d = 3 \\ y_d = 3 \\ z_d = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $D(3, 3, 1)$ ។

៣. រកកូអរដោនេចំណុច I កណ្តាលអង្កត់ $[BC]$ ៖

គេមាន $B(2, -3, -1)$ និង $C(4, 1, 3)$ នោះគេបាន $I\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$

ដូចនេះ $I(3, -1, 1)$ ។

សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[BC]$ ៖

វ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[BC]$ គឺ $\overrightarrow{BC} = (2, 4, 4)$

សមីការប្លង់អាចសរសេរ $a(x - x_i) + b(y - y_i) + c(z - z_i) = 0$

$$2(x - 3) + 4(y + 1) + 4(z - 1) = 0$$

$$2x - 6 + 4y + 4 + 4z - 4 = 0$$

$$2x + 4y + 4z - 6 = 0$$

ដូចនេះសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[BC]$ គឺ $x + 2y + 2z - 3 = 0$ ។

៤. សរសេរសមីការប្លង់រ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (ID) ៖

គេមាន $I(3, -1, 1)$ និង $D(3, 3, 1)$

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(ID)គឺ $\overrightarrow{ID} = (0, 4, 0)$

$$\text{ដូចនេះ } (ID): \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

៥.សរសេរសមីការស្វ័យ(S) មានផ្ចិត I និងកាំ $r = AB$ ៖

គេមាន $I(3, -1, 1)$ និង $AB = 3$

$$\text{តាមរូបមន្ត } (S): (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = r^2$$

$$\text{ដូចនេះ } (S): (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9 \quad (\text{ជាសមីការស្តង់ដារ})$$

$$\text{ឬ } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 2 = 0 \quad (\text{ជាសមីការទូទៅ})$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យពីរចំណុច

$A(1,1,0)$ និង $B(3,-3,4)$ ។

១.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ(P) នៃអង្កត់ $[AB]$ ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ី(S)មានអង្កត់ធ្នឹត AB ។

៣.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $O \in (S)$ (O ជាគល់នៃតម្រុយអរតូនរម៉ាល់)។

សរសេរសមីការប្លង់(Q) ប៉ះនឹងស្វ៊ី(S) ត្រង់ O ។

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(P)និង(Q) ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ(P) នៃអង្កត់ $[AB]$ ៖

គេមាន $A(1,1,0)$ និង $B(3,-3,4)$ នោះ $\overrightarrow{AB} = (2, -4, 4)$

យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$ នោះ $I\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$

ឬ $I(2, -1, 2)$ ។ ប្លង់មេដ្យាទ័រ(P) នៃអង្កត់ $[AB]$ គឺជាប្លង់ដែលកែងនឹង $[AB]$

ត្រង់ចំណុចកណ្តាល I ។ ហេតុនេះសមីការប្លង់(P)អាចសរសេរ៖

$$(P): a(x - x_i) + b(y - y_i) + c(z - z_i) = 0$$

$$2(x - 2) - 4(y + 1) + 4(z - 2) = 0$$

$$2x - 4 - 4y - 4 + 4z - 8 = 0$$

$$2x - 4y + 4z - 16 = 0$$

ដូចនេះ $(P): x - 2y + 2z - 8 = 0$ ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែរ (S) មានអង្កត់ផ្ចិត AB ៖

ស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $I(2, -1, 2)$ និងកាំ $r = \frac{|AB|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+16} = 3$ ។

តាមរូបមន្ត $(S): (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = r^2$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 - 9 = 0$$

ដូចនេះ $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z = 0$ ។

៣.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $O \in (S)$ ៖

គេមាន $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z = 0$ និង $O(0, 0, 0)$

យកកូអរដោនេនៃចំណុច O ជំនួសក្នុងសមីការ (S) គេបាន $0 = 0$ ពិត

ដូចនេះ $O \in (S)$ ។

សរសេរសមីការប្លង់ (Q) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ O ៖

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) ដែលប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់គល់ O គឺ $\overrightarrow{OI} = (2, -1, 2)$

សមីការប្លង់ (Q) អាចសរសេរ $(Q): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$$2(x - 0) - (y - 0) + 2(z - 0) = 0$$

ដូចនេះ $(Q): 2x - y + 2z = 0$ ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់រ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ៖

គេមាន $(P): x - 2y + 2z - 8 = 0$ និង $(Q): 2x - y + 2z = 0$

យក $x = t$, $t \in \mathbb{R}$ គេបាន
$$\begin{cases} t - 2y + 2z - 8 = 0 & (1) \\ 2t - y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

យក $(2) - (1)$ គេបាន $t + y + 8 = 0$ នៅ: $y = -8 - t$

តាម (1) គេបាន $t - 2(-8 - t) + 2z - 8 = 0$

$$t + 16 + 2t + 2z - 8 = 0 \text{ ឬ } z = -4 - \frac{3}{2}t$$

$$\text{ដូចនេះ } (L): \begin{cases} x = t \\ y = -8 - t \\ z = -4 - \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(1,1,1)$, $B(2,-3,4)$ និង $C(3,-4,-2)$ ។

១.រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដោយដឹងថា $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ី(S)មានផ្ចិត O និងកាំ OG ។

៣.សរសេរសមីការប្លង់(P) ប៉ះនឹងស្វ៊ី(S) ត្រង់ G ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់(Q) កាត់តាម G ហើយកែងនឹង $\vec{n} = (9,3,1)$ ។

៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាបីចំណុច A, B, C ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។

៦.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង(Q) ។

ដំណោះស្រាយ

១.រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដោយដឹងថា $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ៖

តាង $G(x_g, y_g, z_g)$ ដោយ $A(1,1,1)$, $B(2,-3,4)$ និង $C(3,-4,-2)$

$$\text{នោះ: } \begin{cases} \overrightarrow{GA} = (1 - x_g, 1 - y_g, 1 - z_g) \\ \overrightarrow{GB} = (2 - x_g, -3 - y_g, 4 - z_g) \\ \overrightarrow{GC} = (3 - x_g, -4 - y_g, -2 - z_g) \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (6 - 3x_g, -6 - 3y_g, 3 - 3z_g)$$

ដោយ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$ សមមូល $\begin{cases} 6 - 3x_g = 0 \\ -6 - 3y_g = 0 \\ 3 - 3z_g = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_g = 2 \\ y_g = -2 \\ z_g = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $G(2, -2, 1)$ ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត O និងកាំ OG ៖

គេមាន $G(2, -2, 1)$ នោះ $OG = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$

ដូចនេះសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត O និងកាំ OG គឺ $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ G ៖

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ G គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{OG} = (2, -2, 1)$

តាមរូបមន្ត $(P): a(x - x_g) + b(y - y_g) + c(z - z_g) = 0$

$$2(x - 2) - 2(y + 2) + (z - 1) = 0$$

$$2x - 4 - 2y - 4 + z - 1 = 0$$

$$2x - 2y + z - 9 = 0$$

ដូចនេះ $(P): 2x - 2y + z - 9 = 0$ ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម G ហើយកែងនឹង $\vec{n} = (9, 3, 1)$ ៖

តាមរូបមន្ត $(Q): a(x - x_g) + b(y - y_g) + c(z - z_g) = 0$

$$9(x - 2) + 3(y + 2) + (z - 1) = 0$$

$$9x - 18 + 3y + 6 + z - 1 = 0$$

$$9x + 3y + z - 13 = 0$$

ដូចនេះ $(Q): 9x + 3y + z - 13 = 0$ ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាបីចំណុច A, B, C ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ៖

គេមាន $A(1,1,1)$, $B(2,-3,4)$ និង $C(3,-4,-2)$

និង $(Q): 9x + 3y + z - 13 = 0$ ។

ចំពោះ $A(1,1,1)$ នោះ $(Q): 9(1) + 3(1) + (1) - 13 = 0$ ឬ $0 = 0$ ពិត

ចំពោះ $B(2,-3,4)$ នោះ $(Q): 9(2) + 3(-3) + (4) - 13 = 0$ ឬ $0 = 0$ ពិត

ចំពោះ $C(3,-4,-2)$ នោះ $(Q): 9(3) + 3(-4) + (-2) - 13 = 0$ ឬ $0 = 0$ ពិត

ដូចនេះ A, B, C ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។

៦.សរសេរសមីការប្លង់ម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ៖

គេមាន
$$\begin{cases} (P): 2x - 2y + z - 9 = 0 \\ (Q): 9x + 3y + z - 13 = 0 \end{cases}$$

យក $x = t$ នោះ
$$\begin{cases} 2t - 2y + z - 9 = 0 & (1) \\ 9t + 3y + z - 13 = 0 & (2) \end{cases}$$

យក $(2) - (1)$ គេបាន $7t + 5y - 4 = 0$ នោះ $y = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}t$

តាម $(1): 2t - 2\left(\frac{4}{5} - \frac{7}{5}t\right) + z - 9 = 0$ នោះ $z = \frac{53}{5} - \frac{24}{5}t$

ដូចនេះ $(L): \begin{cases} x = t \\ y = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}t \\ z = \frac{53}{5} - \frac{24}{5}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1, -2, -4)$, $B(-1, -4, -3)$, $C(3, 4, 5)$ និង $D(7, -7, -2)$ ។

១. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

២. គណនាផ្ទៃទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

៣. ស្រាយថាប្លង់ (ABC) មានសមីការ $6x - 5y + 2z - 8 = 0$ ។

៤. យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I រួច

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (ID) ។

៤. សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (Q) នៃអង្កត់ $[BC]$ ។

៥. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$

គេមាន $A(1, -2, -4)$, $B(-1, -4, -3)$, $C(3, 4, 5)$ និង $D(7, -7, -2)$

គេបាន $\overrightarrow{AD} = (6, -5, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 1)$ និង $\overrightarrow{AC} = (2, 6, 9)$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = (6)(-2) + (-5)(-2) + (2)(1) = -12 + 10 + 2 = 0$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = (6)(2) + (-5)(6) + (2)(9) = 12 - 30 + 18 = 0$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ នោះគេទាញ $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$

នោះ $\overrightarrow{AD} \perp (ABC)$ ដោយ $\overrightarrow{BC} \subset (ABC)$ នោះ $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

២.គណនាជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ៖

គេមាន $A(1, -2, -4)$, $B(-1, -4, -3)$, $C(3, 4, 5)$

គេបាន $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-4+2)^2 + (-3+4)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (4+2)^2 + (5+4)^2} = \sqrt{4+36+81} = 11$$

$$BC = \sqrt{(3+1)^2 + (4+4)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{16+64+64} = 12$$

ដូចនេះ $AB = 3$, $AC = 11$, $BC = 12$ (ឯកតាប្រវែង)

៣.ស្រាយថាប្លង់ (ABC) មានសមីការ $6x - 5y + 2z - 8 = 0$ ៖

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\overrightarrow{AD} \perp (ABC)$ នោះ $\overrightarrow{AD} = (6, -5, 2)$ ជារ៉ឺឌ័រនៃម៉ាត្រិចនៃប្លង់ (ABC) ។

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរ $a(x - x_a) + b(y - y_a) + c(z - z_a) = 0$

$$6(x - 1) - 5(y + 2) + 2(z + 4) = 0$$

$$6x - 6 - 5y - 10 + 2z + 8 = 0$$

$$6x - 5y + 2z - 8 = 0$$

ដូចនេះប្លង់ (ABC) មានសមីការ $6x - 5y + 2z - 8 = 0$ ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I

គេមាន $B(-1, -4, -3)$ & $C(3, 4, 5)$ ដោយ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$

នោះ $I\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-4+4}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$ ឬ $I(1, 0, 1)$ ។

ដូចនេះ $I(1, 0, 1)$ ។

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (ID) ៖

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (ID) គឺ $\overrightarrow{ID} = (6, -7, -3)$

$$\text{ដូចនេះ } (ID): \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -7t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

៤. សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទីរ (Q) នៃអង្កត់ $[BC]$ ៖

គេមាន $B(-1, -4, -3)$ & $C(3, 4, 5)$ នោះ $\overrightarrow{BC} = (4, 8, 8)$

ចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ គឺ $I(1, 0, 1)$ ។ សមីការប្លង់ (Q) អាចសរសេរ៖

$$(Q): a(x - x_i) + b(y - y_i) + c(z - z_i) = 0$$

$$4(x - 1) + 8(y - 0) + 8(z - 1) = 0$$

$$4x - 4 + 8y + 8z - 8 = 0$$

$$4x + 8y + 8z - 12 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 3 = 0$$

ដូចនេះ (Q): $x + 2y + 2z - 3 = 0$ ។

៥. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ៖

គេមាន (P): $6x - 5y + 2z - 8 = 0$ និង (Q): $x + 2y + 2z - 3 = 0$

$$\text{យក } x = t, t \in \mathbb{R} \text{ នោះ } \begin{cases} 6t - 5y + 2z - 8 = 0 \\ t + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $y = -\frac{5}{7} + \frac{5}{7}t$, $z = \frac{31}{14} - \frac{17}{14}t$ ។

ដូចនេះ (L): $x = t$, $y = -\frac{5}{7} + \frac{5}{7}t$, $z = \frac{31}{14} - \frac{17}{14}t$ ដែល $t \in \mathbb{R}$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យពីរចំណុច

$A(-4, 1, 3)$ និង $B(2, 3, -1)$ និងប្លង់ $(P): x + 2y - 2z - 1 = 0$ ។

១. ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) ។

២. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AB) និងប្លង់ (P) រួចបង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

៣. H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច B លើប្លង់ (P) ។ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ។

៤. K ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BH) ។ បង្ហាញថា MH ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ ABK រួចទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច K ។

៥. L ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) ។ បង្ហាញថា $ALHK$ ជាចតុកោណកែងរួចទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច L ។

ដំណោះស្រាយ

១. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) ៖

គេមាន $A(-4, 1, 3)$ និង $B(2, 3, -1)$ នោះ $\overrightarrow{AB} = (6, 2, -4)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AB) ។ សមីការបន្ទាត់អាចសរសេរ ៖

$$(AB): \begin{cases} x = -4 + 6t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

២. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AB) និងប្លង់ (P) ៖

$$\text{គេមាន } (AB): \begin{cases} x = -4 + 6t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{និង } (P): x + 2y - 2z - 1 = 0$$

យកសមីការ (AB) ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$$\begin{aligned} (-4 + 6t) + 2(1 + 2t) - 2(3 - 4t) - 1 &= 0 \\ -4 + 6t + 2 + 4t - 6 + 8t - 1 &= 0 \\ 18t - 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\text{យក } t = \frac{1}{2} \text{ ជំនួសក្នុង } (AB) \text{ គេបាន } \begin{cases} x = -4 + 3 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $M(-1, 2, 1)$ ។

បង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$ ៖

គេមាន $M(-1, 2, 1)$ និង $A(-4, 1, 3)$ និង $B(2, 3, -1)$

$$\text{ដោយ } \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1 = x_m, \frac{y_a + y_b}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 = y_m$$

$$\text{និង } \frac{z_a + z_b}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1 = z_m \text{ នោះបញ្ជាក់ថាចំណុច } M \text{ ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ } [AB] \text{ ។}$$

៣. សរសេរសមីការប្លង់ម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃ H

ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច B លើប្លង់ (P) នោះបន្ទាត់ $(BH) \perp (P)$

គេបានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_p = (1, 2, -2)$ របស់ប្លង់ (P) ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (BH) និងចំណុច $B(2, 3, -1) \in (BH)$ នោះសមីការបន្ទាត់ (BH) សរសេរ៖

$$(BH): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ម្យ៉ាងទៀតយកសមីការ (BH) ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$$(2 + t) + 2(3 + 2t) - 2(-1 - 2t) - 1 = 0$$

$$2 + t + 6 + 4t + 2 + 4t - 1 = 0$$

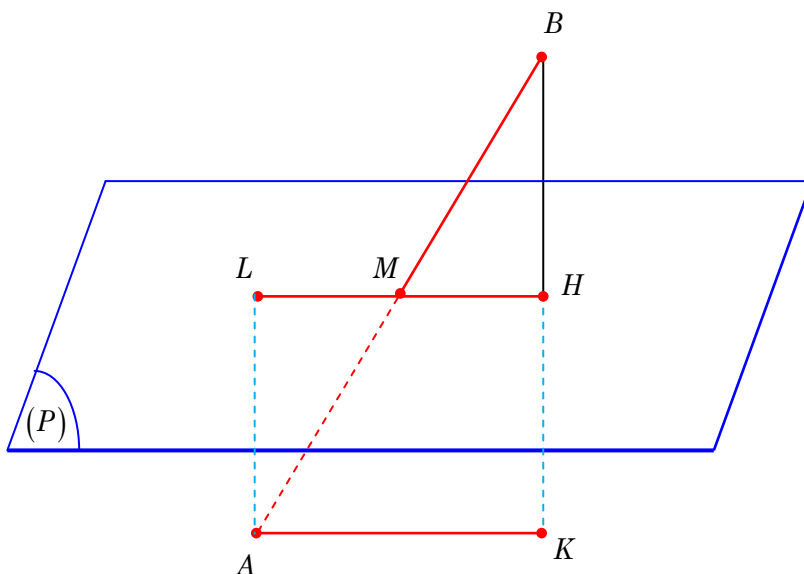
$$9t + 9 = 0$$

$$t = -1$$

យកតម្លៃ $t = -1$ ជួសក្នុង (BH) គេបាន $\begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = -1 + 2 = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(1, 1, 1)$ ។

៨.បង្ហាញថា MH ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ ABK ៖



គេមាន K ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BH) នោះ $AK \perp BK$
 ហើយ $(BH) \perp (P)$ និង $MH \in (P)$ នោះ $MH \perp BH$ ហេតុនេះគេទាញ
 $AK \parallel MH$ ហើយដោយ M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ (សម្រាយខាងលើ)
 នោះគេទាញបានថា H ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BK]$ ដែរ។
 ដូចនេះ MH ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណកែង BAK ។
 ទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច K ៖

$$\text{ដោយ } H \text{ ជាចំណុចកណ្តាលនៃ } [BK] \text{ នោះគេបាន } \begin{cases} x_h = \frac{x_b + x_k}{2} \\ y_h = \frac{y_b + y_k}{2} \\ z_h = \frac{z_b + z_k}{2} \end{cases}$$

$$\text{គេទាញ } \begin{cases} x_k = 2x_h - x_b = 2 - 2 = 0 \\ y_k = 2y_h - y_b = 2 - 3 = -1 \\ z_k = 2z_h - z_b = 2 + 1 = 3 \end{cases} \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $H(0, -1, 3)$ ។

៥.បង្ហាញថា $ALHK$ ជាចតុកោណកែង រួចទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច L

គេមាន L ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) នោះ $AL \perp (P)$ ដោយ $LH \subset (P)$
 នោះ $AL \perp LH$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $AK \perp HK$ និង $LH \perp HK$ នោះគេទាញថា
 $ALHK$ ជាចតុកោណកែង។

តាង $L(x_l, y_l, z_l)$ នោះ $\overline{AL} = (x_l + 4, y_l - 1, z_l - 3)$ និង $\overline{KH} = (1, 2, -2)$

$$\text{ដោយ } ALHK \text{ ជាចតុកោណកែងនោះ } \overline{AL} = \overline{HK} \text{ ឬ } \begin{cases} x_l + 4 = 1 \\ y_l - 1 = 2 \\ z_l - 3 = -2 \end{cases}$$

គេទាញ $x_l = -3, y_l = 3, z_l = 1$ ។ ដូចនេះ $L(-3, 3, 1)$ ។

លំហាត់ទី២៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ ៖

$$(L_1): \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{2} \quad \text{និង} \quad (L_2): \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3 \\ z = -1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

២. A និង B ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L_2) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា

$x_a = -1$ និង $x_b = 5$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។

៣. H និង K ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A និង B ទៅលើបន្ទាត់ (L_1)

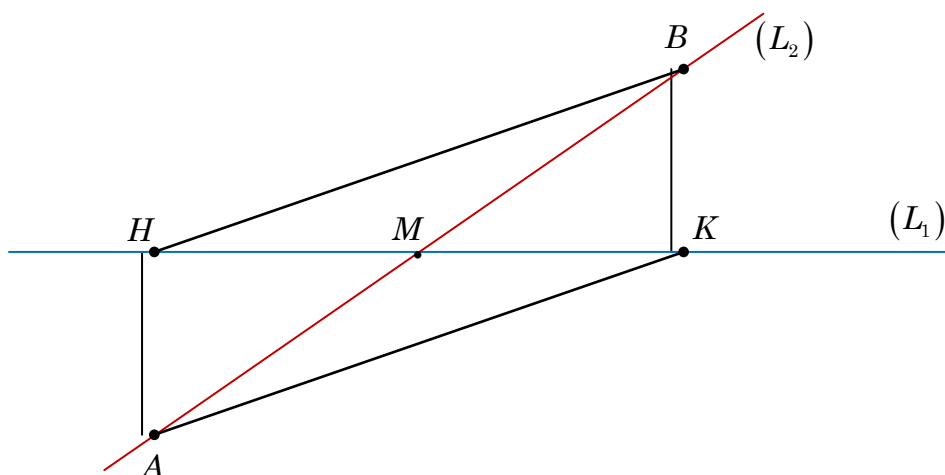
រៀងគ្នា ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K ។

៤. គណនា $\overline{AK}$ និង $\overline{HB}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $AHBK$ ។

៥. គណនា AH និង HK រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $AHBK$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ៖



$$(L_1): \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{2} \quad \text{និង} \quad (L_2): \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3 \\ z = -1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

តាង $M(x_m, y_m, z_m)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) នោះគេបាន

$$M \in (L_1) \text{ សមមូល } \frac{x_m+1}{-1} = \frac{y_m+3}{-2} = \frac{z_m-5}{2} \quad (1)$$

$$M \in (L_2) \text{ សមមូល } \begin{cases} x_m = 2+t \\ y_m = 3 \\ z_m = -1-t \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន } \frac{2+t+1}{-1} = \frac{3+3}{-2} = \frac{-1-t-5}{2}$$

$$\text{សមមូល } \frac{t+3}{-1} = -3 = \frac{-t-6}{2} \quad \text{សមមូល } \begin{cases} \frac{t+3}{-1} = -3 \\ \frac{-t-6}{2} = -3 \end{cases} \quad \text{សមមូល } t = 0$$

យក $t = 0$ ជួសក្នុង(2) គេបាន $x_m = 2, y_m = 3, z_m = -1$ ។

ដូចនេះ $M(2, 3, -1)$ ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B

ដោយ A និង B ជាពីរចំណុចស្ថិតលើបន្ទាត់ (L_2) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា

$$x_a = -1 \text{ និង } x_b = 5 \text{ នោះគេបាន } \begin{cases} x_a = 2+t = -1 \\ y_a = 3 \\ z_a = -1-t \end{cases} \quad \text{គេទាញ } t = -3$$

នោះ $x_a = -1, y_a = 3, z_a = -1 + 3 = 2$ ឬ $A(-1, 3, 2)$ ។

$$\text{ហើយ } \begin{cases} x_b = 2+t=5 \\ y_b = 3 \\ z_b = -1-t \end{cases} \text{ គេទាញ } t=3 \text{ ហើយ } x_b=5, y_b=3, z_b=-4 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $A(-1,3,2)$ និង $B(5,3,-4)$ ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K

តាង $H(x_h, y_h, z_h)$ និង $K(x_k, y_k, z_k)$ ។ដោយ H និង K ជាចំណោលកែងនៃចំណុច A និង B ទៅលើបន្ទាត់(L_1) រៀងគ្នានោះ $H \in (L_1)$ និង $K \in (L_1)$

$$\text{គេបាន } H \in (L_1) \Leftrightarrow \frac{x_h+1}{-1} = \frac{y_h+3}{-2} = \frac{z_h-5}{2} = p \text{ ឬ } \begin{cases} x_h = -1-p \\ y_h = -3-2p \\ z_h = 5+2p \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{ហើយ } K \in (L_1) \Leftrightarrow \frac{x_k+1}{-1} = \frac{y_k+3}{-2} = \frac{z_k-5}{2} = q \text{ ឬ } \begin{cases} x_k = -1-q \\ y_k = -3-2q \\ z_k = 5+2q \end{cases} \quad (4)$$

ដោយ $A(-1,3,2)$ និង $B(5,3,-4)$ នោះគេបាន ៖

$$\overrightarrow{AH} = (-p, -2p-6, 2p+3) \text{ និង } \overrightarrow{BK} = (-q-6, -2q-6, 2q+9)$$

បន្ទាត់(L_1) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_1} = (-1, -2, 2)$ ។

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0 \text{ ឬ } p+4p+12+4p+6=0 \text{ នោះ } p=-2$$

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{BK} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0 \text{ ឬ } q+6+4q+12+4q+18=0 \text{ នោះ } q=-4$$

ចំពោះ $p=-2$ តាម(3) គេបាន $x_h=1, y_h=1, z_h=1$ ។

ចំពោះ $q=-4$ តាម(4) គេបាន $x_k=3, y_k=5, z_k=-3$ ។

ដូចនេះ $H(1,1,1)$ និង $K(3,5,-3)$ ។

៤.គណនា $\overrightarrow{AK}$ និង $\overrightarrow{HB}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $AHBK$ ៖

គេមាន $A(-1,3,2)$, $K(3,5,-3)$, $H(1,1,1)$, $B(5,3,-4)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AK} = (4,2,-5)$ និង $\overrightarrow{HB} = (4,2,-5)$ ។

ដោយសម្គាល់ឃើញថា $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{HB} = (4,2,-5)$ នោះ $AK = HB$ និង $AK \parallel HB$

ដូចនេះចតុកោណ $AHBK$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៥.គណនា AH និង HK រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $AHBK$ ៖

គេមាន $A(-1,3,2)$, $H(1,1,1)$ និង $K(3,5,-3)$

គេបាន $AH = \sqrt{(1+1)^2 + (1-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

$$HK = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

ដូចនេះ $AH = 3$ (ឯកតាប្រវែង) និង $HK = 6$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $AH \perp HK$ និង $BK \perp HK$ នោះត្រីកោណកែង AHK និង

ត្រីកោណកែង BKH ប៉ុនគ្នាព្រោះ $AH = BK$ និង HK ជ្រុងរួម។

គេបាន $S_{AHBK} = 2S_{AHK} = 2\left(\frac{1}{2}AH.HK\right) = AH.HK = 18$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

ដូចនេះ $S_{AHBK} = 18$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច៖

$$A(1,1,1), B(2,3,3), C(6,-1,5) \text{ និង } D\left(6, -4, \frac{7}{2}\right) \text{ ។}$$

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។

២.បង្ហាញថា $\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

៣.គណនា $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ACD ។

៤. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច C លើ $[AD]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃ H ។

៥.គណនា AB , BC និង AD រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ៖

$$\text{គេមាន } A(1,1,1), B(2,3,3), C(6,-1,5) \text{ និង } D\left(6, -4, \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{យើងបាន } \overrightarrow{AB} = (1, 2, 2), \overrightarrow{AC} = (5, -2, 4), \overrightarrow{AD} = \left(5, -5, \frac{5}{2}\right), \overrightarrow{BC} = (4, -4, 2)$$

$$\text{និង } \overrightarrow{CD} = \left(0, -3, -\frac{3}{2}\right) \text{ ។}$$

២.បង្ហាញថា $\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ៖

$$\text{យើងមាន } \overrightarrow{AD} = \left(5, -5, \frac{5}{2}\right) \text{ និង } \overrightarrow{BC} = (4, -4, 2)$$

ដោយ $\frac{5}{4} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{2}$ នោះយើងទាញបានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AD}$ & $\overrightarrow{BC}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 2)$ និង $\overrightarrow{AD} = \left(5, -5, \frac{5}{2}\right)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (1)(5) + (2)(-5) + (2)\left(\frac{5}{2}\right) = 5 - 10 + 5 = 0$

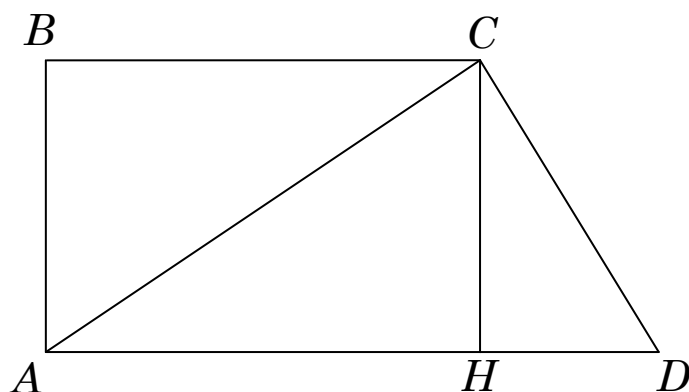
សមមូល $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ នោះគេទាញបាន $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

ដូចនេះចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណញ្ជាយកែងត្រង់ A និង B ។

៣. គណនា $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ACD ៖



យើងមាន $\overrightarrow{AC} = (5, -2, 4)$ និង $\overrightarrow{CD} = \left(0, -3, -\frac{3}{2}\right)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 + 6 - 6 = 0$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CD}$ នោះគេទាញបាន ACD ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល C ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃ H

តាង $H(x_h, y_h, z_h)$ ។ ដោយ H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច C លើ $[AD]$

នោះយើងបាន $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB}$ ដោយ $\overrightarrow{HC} = (6 - x_h, -1 - y_h, 5 - z_h)$

និង $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 2)$ នោះគេទាញបាន $\begin{cases} 6 - x_h = 1 \\ -1 - y_h = 2 \\ 5 - z_h = 2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x_h = 5 \\ y_h = -3 \\ z_h = 3 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(5, -3, 3)$ ។

៥.គណនា AB , BC និង AD រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABCD$ ៖

ដោយ $A(1, 1, 1), B(2, 3, 3), C(6, -1, 5), D\left(6, -4, \frac{7}{2}\right)$

យើងបាន $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

$$BC = \sqrt{(6-2)^2 + (-1-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+16+4} = 6$$

$$AD = \sqrt{(6-1)^2 + (-4-1)^2 + \left(\frac{7}{2}-1\right)^2} = \sqrt{25+25+\frac{25}{4}} = \frac{15}{2}$$

ដូចនេះ $AB = 3, BC = 6, AD = \frac{15}{2}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណឆ្មាយ $ABCD$ គឺ $S = \frac{(BC + AD) \times AB}{2}$

ដូចនេះ $S = \frac{(\frac{15}{2} + 6)(3)}{2} = \frac{81}{4}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$$A(4,1,4), B(3,5,5), C(3,-1,2) \text{ និង } D\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{5}{2}\right) \text{ ។}$$

១.គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។

៣. M ជាចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (AD) ដោយដឹងថាចំណុច M មានអាប់ស៊ីស

$$x_m = 1 \text{ ។ ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច } M \text{ ។}$$

៤.គណនា $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ MBC ។

៥.គណនា MB និង MC រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MBC ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ៖

$$\text{គេមាន } A(4,1,4), B(3,5,5), C(3,-1,2) \text{ និង } D\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{នោះ: } \overrightarrow{AB} = (-1, 4, 1), \overrightarrow{AD} = \left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right) \text{ និង } \overrightarrow{DC} = \left(\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$$

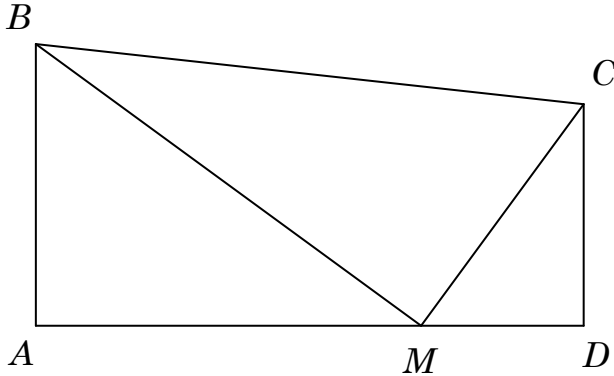
$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} + 0 - \frac{3}{2} = 0 \text{ និង } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = -\frac{3}{4} + 0 + \frac{3}{4} = 0 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ និង } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \text{ ។}$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ និង } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \text{ សមមូល } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \text{ និង } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$$

ហើយគេទាញបាន $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DC}$ នោះ $ABCD$ ជាចតុកោណញ្ជាយកែង។

ដូចនេះ $ABCD$ ជាចតុកោណញ្ជាយកែងត្រង់ A និង D ។



២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC)

បន្ទាត់ (AD) និង (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា $\overrightarrow{AD} = \left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$

និង $\overrightarrow{BC} = (0, -6, -3)$ ។ ដោយ $A(4, 1, 4)$ និង $B(3, 5, 5)$ នោះសមីការ

ប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) អាចសរសេរ៖

$$(AD): \begin{cases} x = 4 - \frac{3}{2}t \\ y = 1 \\ z = 4 - \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{និង} \quad (BC): \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - 6u \\ z = 5 - 3u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$$

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ៖

ដោយ M ជាចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (AD) ហើយមានអាប់ស៊ីស $x_m = 1$ នោះ

$$\text{គេបាន} \begin{cases} x_m = 4 - \frac{3}{2}t = 1 \\ y_m = 1 \\ z_m = 4 - \frac{3}{2}t \end{cases} \quad \text{គេទាញ} \quad t = 2 \quad \text{ហើយ} \quad x_m = 1, y_m = 1, z_m = 1 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $M(1,1,1)$ ។

៤.គណនា $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ MBC ៖

គេមាន $M(1,1,1)$, $B(3,5,5)$ និង $C(3,-1,2)$

នោះ $\overrightarrow{MB} = (2,4,4)$ និង $\overrightarrow{MC} = (2,-2,1)$ ។

គេបាន $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = (2)(2) + (4)(-2) + (4)(1) = 4 - 8 + 4 = 0$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC}$ ។

ដូចនេះត្រីកោណ MBC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M ។

៥.គណនា MB និង MC រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MBC ៖

យើងមាន MBC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M ។ $\overrightarrow{MB} = (2,4,4)$ និង $\overrightarrow{MC} = (2,-2,1)$

យើងបាន $MB = |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$

$$MC = |\overrightarrow{MC}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

ដូចនេះ $MB = 6$ (ឯកតាប្រវែង) និង $MC = 3$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ MBC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M នោះយើងបាន៖

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} MB \times MC = \frac{1}{2} (6)(3) = 9 \quad (\text{ឯកតាផ្ទៃក្រឡា})$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៨

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យស្វ៊ែរ (S) សមីការ

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 \text{ និងបន្ទាត់}(L): \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -7 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (L) និងស្វ៊ែរ (S) ។
(គេដឹងថាចំណុច A មានអាប់ស៊ីសអវិជ្ជមាន) ។

២.សរសេរសមីការប្លង់ (P) និង (Q) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែរ (S) រៀងគ្នាត្រង់ A និង B ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់ (π) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (d) ។

៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B \in (\pi)$ រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់ (π) ត្រង់ B ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (L) និងស្វ៊ែរ (S)

$$\text{គេមាន } (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 \quad (1)$$

$$\text{និង } \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -7 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (2)$$

យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន ៖

$$(-4 + 3t - 1)^2 + (-7 + 4t + 1)^2 + (2 + t - 2)^2 = 9$$

$$(3t - 5)^2 + (4t - 6)^2 + t^2 = 9$$

$$9t^2 - 30t + 25 + 16t^2 - 48t + 36 + t^2 - 9 = 0$$

$$26t^2 - 78t + 52 = 0$$

ដោយ $a + b + c = 26 - 78 + 52 = 0$ គេទាញយក $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{c}{a} = 2$ ។

ចំពោះ $t = 1$ តាម(2) គេបាន $\begin{cases} x = -4 + 3 = -1 \\ y = -7 + 4 = -3 \\ z = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

ចំពោះ $t = 2$ តាម(2) គេបាន $\begin{cases} x = -4 + 6 = 2 \\ y = -7 + 8 = 1 \\ z = 2 + 2 = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $A(-1, -3, 3)$ និង $B(2, 1, 4)$

(ព្រោះចំណុច A មានអាប់ស៊ីសអវិជ្ជមាន)។

២.សរសេរសមីការប្លង់(P) និង (Q) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ី(S) រៀងគ្នាត្រង់ A និង B ៖

ស្វ៊ី (S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ មានផ្ចិត $I(1, -1, 2)$ ។

ដោយ $A(-1, -3, 3)$ និង $B(2, 1, 4)$ នោះ $\overline{IA} = (-2, -2, 1)$ និង $\overline{IB} = (1, 2, 2)$

ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(P) និង(Q) ដែលប៉ះនឹងស្វ៊ី(S) ត្រង់ A និង B ។

សមីការប្លង់(P) សរសេរ $-2(x+1) - 2(y+3) + (z-3) = 0$

$$-2x - 2 - 2y - 6 + z - 3 = 0$$

$$-2x - 2y + z - 11 = 0$$

សមីការប្លង់(Q) សរសេរ $(x-2) + 2(y-1) + 2(z-4) = 0$

$$x - 2 + 2y - 2 + 2z - 8 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 12 = 0$$

ដូចនេះ (P): $-2x - 2y + z - 11 = 0$ និង (Q): $x + 2y + 2z - 12 = 0$ ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(P) និង (Q) ៖

គេមាន(P): $-2x - 2y + z - 11 = 0$ និង (Q): $x + 2y + 2z - 12 = 0$

យក $z = t$ គេបាន
$$\begin{cases} -2x - 2y + t - 11 = 0 & (1) \\ x + 2y + 2t - 12 = 0 & (2) \end{cases}$$

បូកសមីការ(1) & (2) គេបាន $-x + 3t - 23 = 0$ ឬ $x = -23 + 3t$

តាម(2) គេបាន $-23 + 3t + 2y + 2t - 12 = 0$ ឬ $y = \frac{35}{2} - \frac{5}{2}t$

ដូចនេះ (d):
$$\begin{cases} x = -23 + 3t \\ y = \frac{35}{2} - \frac{5}{2}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

៤.សរសេរសមីការប្លង់(π) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់(d) ៖

បន្ទាត់(d) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_d} = \left(3, -\frac{5}{2}, 1\right)$ ។

ដោយប្លង់(π) $\perp$ (d) នោះ $\overrightarrow{u_d} = \left(3, -\frac{5}{2}, 1\right)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់(d) ។

គេបាន (π): $a(x - x_a) + b(y - y_a) + c(z - z_a) = 0$

$$3(x + 1) - \frac{5}{2}(y + 3) + (z - 3) = 0$$

$$6x + 6 - 5y - 15 + 2z - 6 = 0$$

$$6x - 5y + 2z - 15 = 0$$

ដូចនេះ (π): $6x - 5y + 2z - 15 = 0$ ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B \in (\pi)$ ៖

គេមាន $(\pi): 6x - 5y + 2z - 15 = 0$ និង $B(2,1,4)$

យកកូអរដោនេនៃចំណុច B ជំនួសក្នុងសមីការ (π) គេបាន ៖

$$6(2) - 5(1) + 2(4) - 15 = 0$$

$$12 - 5 + 8 - 15 = 0$$

$$0 = 0 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

ដូចនេះ $B \in (\pi)$ ។

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់ (π) ត្រង់ B ៖

ប្លង់ $(\pi): 6x - 5y + 2z - 15 = 0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_\pi = (6, -5, 2)$ ។

ដោយបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់ (π) នោះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_\pi = (6, -5, 2)$ ជាវ៉ិចទ័រ

ប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ (Δ) ។ ដោយបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $B(2,1,4)$

នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) សរសេរ ៖

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 1 - 5t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៩

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យស្វ៊ែរ (S) សមីការ

$$(x+5)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36 \text{ និងបន្ទាត់}(L): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

១.គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ៊ែរ (S) ។

២.យក H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច I លើបន្ទាត់ (L) ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងរង្វាស់ IH រួចទាញថាបន្ទាត់ (L) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច H ។

៣. A និង B ជាចំណុចពីរស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា

$$x_a = -5 \text{ និង } x_b = 5 \text{ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច } A \text{ និង } B \text{ ។}$$

៤.គណនា AB , IA និង IB រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ IAB ។

៥.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IAB ។

៦.សរសេរសមីការប្លង់ (IAB) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IH)$

ដំណោះស្រាយ

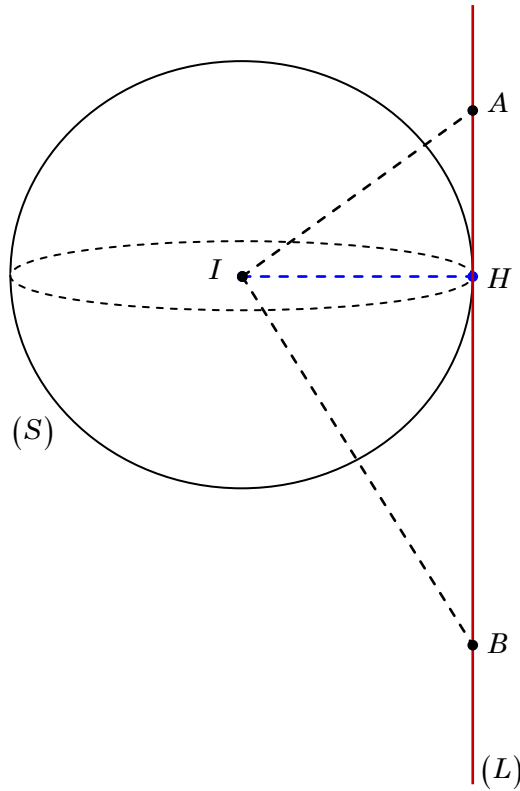
១.គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ៊ែរ (S) ៖

$$\text{គេមាន}(S): (x+5)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36$$

$$\text{មានទម្រង់ } (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \text{ ដែល } \begin{cases} a = -5 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \text{ និង } r = 6$$

ដូចនេះកូអរដោនេផ្ចិត $I(-5, -2, -1)$ និង កាំ $r = 6$ ។

២.គណនាកូអរដោនេចំណុច H និង IH រួចចាញ់ថា (L) ប៉ះទៅនឹង (S) ត្រង់ចំណុច H ៖



តាង $H(x_h, y_h, z_h)$ ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច I លើបន្ទាត់ (L) នោះ

$$\text{គេបាន } H \in (L) \text{ សមមូល } \begin{cases} x_h = -1 + 2t \\ y_h = 3 + t \\ z_h = -3 + 2t \end{cases} \quad (1)$$

គេមាន $\overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{u_L} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_L} = 0$ ដែល $\overrightarrow{u_L} = (2, 1, 2)$ ជារ៉ឺចង្វាក់ទ្រឹស្តីសនៃបន្ទាត់ (L) ។ ដោយគេមាន $\overrightarrow{IH} = (2t + 4, t + 5, 2t - 2)$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_L} = 2(2t + 4) + (t + 5) + 2(2t - 2) = 0$$

$$4t + 8 + t + 5 + 4t - 4 = 0$$

$$9t + 9 = 0$$

គេទាញបាន $t = -1$ យកជួសក្នុង(1) គេបាន
$$\begin{cases} x_h = -1 - 2 = -3 \\ y_h = 3 - 1 = 2 \\ z_h = -3 - 2 = -5 \end{cases}$$

ដូចនេះ $H(-3, 2, -5)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $I(-5, -2, -1)$ និង $H(-3, 2, -5)$

គេបាន $IH = \sqrt{(-3+5)^2 + (2+2)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$

ដូចនេះ $IH = 6$ (ឯកតាប្រវែង)។

ដោយ $IH \perp (L)$ នោះ IH ជាចម្ងាយពីចំណុច I ទៅបន្ទាត់ (L) និង $IH = r = 6$

ដូចនេះយើងអាចសន្និដ្ឋានបានថាបន្ទាត់ (L) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច H ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B :

មាន A និង B ជាចំណុចពីរស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា

$x_a = -5$ និង $x_b = 5$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} x_a = -1 + 2t = -5 \\ y_a = 3 + t \\ z_a = -3 + 2t \end{cases} \quad \text{សមមូល } t = -2, x_a = -5, y_a = 1, z_a = -7 \text{ ។}$$

$$\begin{cases} x_b = -1 + 2t = 5 \\ y_b = 3 + t \\ z_b = -3 + 2t \end{cases} \quad \text{សមមូល } t = 3, x_b = 5, y_b = 6, z_b = 3 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $A(-5, 1, -7)$ និង $B(5, 6, 3)$ ។

៤.គណនា AB , IA និង IB រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ IAB ៖

គេមាន $I(-5, -2, -1)$, $A(-5, 1, -7)$ និង $B(5, 6, 3)$

$$\text{យើងបាន } AB = \sqrt{(5+5)^2 + (6-1)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{100 + 25 + 100} = 15$$

$$IA = \sqrt{(-5+5)^2 + (1+2)^2 + (-7+1)^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$$

$$IB = \sqrt{(5+5)^2 + (6+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{100 + 64 + 16} = 6\sqrt{5}$$

$$\text{ដូចនេះ: } AB = 15, IA = 3\sqrt{5}, IB = 6\sqrt{5} \quad (\text{ឯកតាប្រវែង})$$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀតគេមាន } IA^2 + IB^2 = (3\sqrt{5})^2 + (6\sqrt{5})^2 = 225 = AB^2$$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក្រីយ៉េងទាញបានថា IAB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ I ។

៥.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IAB ៖

$$\text{គេមាន } I(-5, -2, -1), A(-5, 1, -7) \text{ និង } B(5, 6, 3)$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{IA} = (0, 3, -6) \text{ និង } \overrightarrow{IB} = (10, 8, 4)$$

$$\text{នោះ: } \overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -6 \\ 10 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 60\vec{i} - 60\vec{j} - 30\vec{k}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IB} = (60, -60, -30) \text{ ។}$$

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IAB គឺ ៖

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IB}| = \frac{1}{2} \sqrt{3600 + 3600 + 900} = 45 \quad (\text{ឯកតាផ្ទៃ})$$

៦.សរសេរសមីការប្លង់ (IAB) និងសមីការប្លង់រ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (IA), (IB), (IH) ៖

$$\text{វ៉ិចទ័ររម្ងាល់នៃប្លង់ } (IAB) \text{ គឺ } \vec{n} = \overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IB} = (60, -60, -30)$$

ដោយប្លង់ (IAB) កាត់តាមចំណុច $I(-5, -2, -1)$ នោះគេបាន៖

$$(IAB): a(x - x_i) + b(y - y_i) + c(z - z_i) = 0$$

$$60(x+5) - 60(y+2) - 30(z+1) = 0$$

$$\text{ដូចនេះ } (IAB): 2x - 2y - z + 5 = 0 \quad \forall$$

ម្យ៉ាងទៀតវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ គឺ ៖

$$\overrightarrow{IA} = (0, 3, -6), \overrightarrow{IB} = (10, 8, 4), \overrightarrow{IH} = (2, 4, -4)$$

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ អាចសរសេររៀងគ្នា ៖

$$(IA): \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 + 3u \\ z = -1 + 6u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$$

$$(IB): \begin{cases} x = -5 + 10v \\ y = -2 + 8v \\ z = -1 + 4v \end{cases}, v \in \mathbb{R}$$

$$(IH): \begin{cases} x = -5 + 2w \\ y = -2 + 4w \\ z = -1 - 4w \end{cases}, w \in \mathbb{R}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យប្លង់ពីរ $(\alpha) : x + 2y + 2z - 11 = 0$, $(\beta) : 2x - 2y + z - 1 = 0$

និងបន្ទាត់ $(\Delta) : x = 3 + t, y = 6 - 4t, z = 7 - t$ ដែល $t \in \mathbb{R}$

១.គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (Δ) ជាមួយប្លង់

(α) និង (β) រៀងគ្នា ។

២.យក C ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 1$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (α) និង (β) ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកប្រភេទនៃ $\triangle ABC$ ។

៣.កំណត់សមីការស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់

(α) និង (β) ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ A និង B ៖

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុងសមីការ (α) គេបាន៖

$$(3+t) + 2(6-4t) + 2(7-t) - 11 = 0$$

$$3+t+12-8t+14-2t-11=0$$

$$-9t+18=0 \Rightarrow t=2$$

យក $t=2$ ជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=5, y=-2, z=5$ ។

ដូចនេះ $A(5, -2, 5)$ ។

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុងសមីការ (β) គេបាន៖

$$2(3+t) - 2(6-4t) + (7-t) - 1 = 0$$

$$6+2t-12+8t+7-t-1=0$$

$$9t=0 \Rightarrow t=0$$

យក $t=0$ ជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=3, y=6, z=7$ ។

ដូចនេះ $B(3, 6, 7)$ ។

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកប្រភេទនៃ $\triangle ABC$

ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $\begin{cases} 1 + 2y + 2z - 11 = 0 \\ 2 - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} 2y + 2z - 10 = 0 \\ -2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

គេទាញបាន $y = 2, z = 3$ ។ ដូចនេះ $C(1, 2, 3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{CA} = (4, -4, 2); \overrightarrow{CB} = (2, 4, 4)$

គេបាន $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 8 - 16 + 8 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

ហើយ $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6; |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$

គេទាញបាន $CA = CB = 6$ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត

៣.កំណត់សមីការស្វ៊ែរ (S) ៖

តាង $I(a, b, c)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ)

ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

គេបាន $\begin{cases} a = 3 + t \\ b = 6 - 4t \\ c = 7 - t \end{cases}$ (1) ហើយ $R = d(I, \alpha) = d(I, \beta)$

$$\frac{|(3+t) + 2(6-4t) + 2(7-t) - 11|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|2(3+t) - 2(6-4t) + (7-t) - 1|}{\sqrt{4+4+1}}$$

$$\text{ឬ } \frac{|-9t+18|}{3} = \frac{|9t|}{3} \Rightarrow t = 1 \text{ យកជួសក្នុង (1) គេបាន } \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases}$$

ហើយ $R = \frac{9}{3} = 3$ ។ ដូចនេះសមីការស្វ៊ែរជាសមីការស្វ៊ែរសរសេរ

$$(S) : (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 = 9 \quad \text{។}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣១

ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេឲ្យប្លង់ $(p): x - 2y + 2z - 6 = 0$ និងបន្ទាត់ $(L): \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{-2}$ ។

១. ចូរបង្ហាញថា $(L) \perp (p)$ រួចគណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយប្លង់ (p) ។

២. តាង A, B, C ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (p) ជាមួយអ័ក្ស $(ox), (oy), (oz)$ រៀងគ្នា។

ចូរគណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៣. គណនាកូអរដោនេចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ដំណោះស្រាយ

១. បង្ហាញថា $(L) \perp (p)$ រួចគណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាង (L) និង (p) ៖

គេមានប្លង់ $(p): x - 2y + 2z - 6 = 0$ និងបន្ទាត់ $(L): \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{-2}$

វ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (p) គឺ $\vec{n} = (1, -2, 2)$ ហើយវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L)

គឺ $\vec{u} = (-1, 2, -2)$ ។

គេបាន $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{2}{-2}$ នោះ $\vec{n}$ និង $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា។

ដូចនេះ $(L) \perp (p)$ ។

$$\text{ម្យ៉ាងទៀតតាង } \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{-2} = t \quad \text{នោះ: } \begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \quad (1)$$

យក(1) ជំនួសក្នុង(p) គេបាន៖

$$\begin{aligned} (-t) - 2(3 + 2t) + 2(-3 - 2t) - 6 &= 0 \\ -t - 6 - 4t - 6 - 4t - 6 &= 0 \\ -9t - 18 &= 0 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

យក $t = -2$ ជំនួសក្នុង(1) គេបានចំណុច $M(2, -1, 1)$ ។

២.គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

គេមាន (p): $x - 2y + 2z - 6 = 0$

ចំពោះ $y = z = 0$ នោះ $x - 6 = 0$ ឬ $x = 6$ គេបាន $A(6, 0, 0)$ ។

ចំពោះ $x = z = 0$ នោះ $-2y - 6 = 0$ ឬ $y = -3$ គេបាន $B(0, -3, 0)$ ។

ចំពោះ $x = y = 0$ នោះ $2z - 6 = 0$ ឬ $z = 3$ គេបាន $C(0, 0, 3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (-6, -3, 0)$ និង $\overrightarrow{AC} = (-6, 0, 3)$ ។

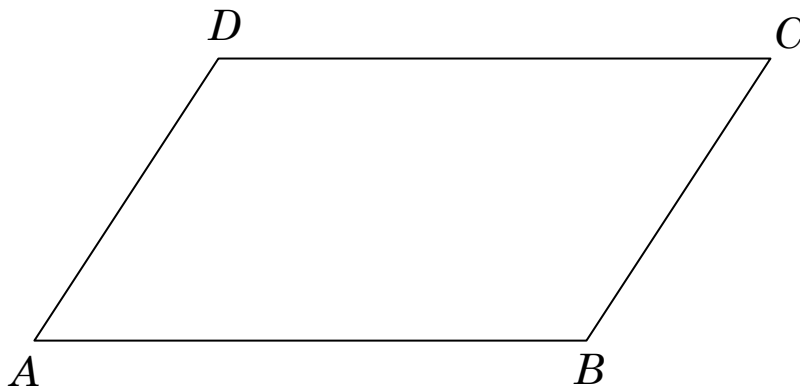
$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 18\vec{j} - 18\vec{k} \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-9, 18, -18)$ ។

ហើយផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{81 + 324 + 324} = \frac{27}{2} = 13.5 \text{ ឯកតាផ្ទៃ។}$$

៣. គណនាកូអរដោនេចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម



តាង $D(x_d, y_d, z_d)$ នោះ $\overrightarrow{AD} = (x_d - 6, y_d, z_d)$ និង $\overrightarrow{BC} = (0, 3, 3)$ ។

ដោយ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមនោះ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} x_d - 6 = 0 \\ y_d = 3 \\ z_d = 3 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} x_d = 6 \\ y_d = 3 \\ z_d = 3 \end{cases}$$

ដូចនេះ $D(6, 3, 3)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} \quad \text{និង} \quad \vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \quad \text{។}$$

១.គណនា $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ និង $|\vec{n}|$ ។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (p) កាត់តាមចំណុច $A(-1, 2, -3)$ ហើយកែងនឹង $\vec{n}$ ។

៣.កំណត់សមីការផ្ទៃ (S) មានផ្ចិត O ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (p) ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ និង $|\vec{n}|$

$$\text{គេមាន } \vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} \quad \text{និង} \quad \vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \vec{n} = (1, 2, -2) \quad \text{និង} \quad |\vec{n}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3 \quad \text{។}$$

២. កំណត់សមីការប្លង់ (p) កាត់តាមចំណុច $A(-1, 2, -3)$ ហើយកែងនឹង $\vec{n}$

$$\text{តាមរូបមន្ត } (p): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\text{ដោយ } A(-1, 2, -3) \text{ និង } \vec{n} = (1, 2, -2)$$

$$\text{គេបាន } (p): 1(x + 1) + 2(y - 2) - 2(z + 3) = 0$$

$$\text{ដូចនេះ } (p): x + 2y - 2z - 9 = 0 \quad \forall$$

៣. កំណត់សមីការស្វ័យ (S) មានផ្ចិត O ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (p)

$$\text{សមីការស្វ័យ } (S) \text{ ផ្ចិត } O \text{ មានរាង } (S): x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ ដែល } R \text{ ជាកាំ។}$$

$$\text{ដោយ } (S) \text{ ប៉ះនឹងប្លង់ } (p) \text{ នោះ } R = d(O, (p))$$

$$\text{គេបាន } R = \frac{|x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 9|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|0 + 0 + 0 - 9|}{3} = 3$$

$$\text{ដូចនេះ } (S): x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \forall$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៣

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1, 2, 3); B(2, 3, -6); C(-2, 1, -2)$ និង $D(0, 4, 0)$ ។

១. ចូរគណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$ រួចទាញថាបីចំណុច B, C, D

មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គណនាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ BCD រួចកំណត់សមីការប្លង់ (BCD) ។

២. គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពី A ទៅប្លង់ (BCD) ។

៣. H ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់បាត (BCD) ។

កំណត់សមីការបន្ទាត់ (AH) រួចរកកូអរដោនេ H ។

ដំណោះស្រាយ

១) គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$ រួចទាញថាបីចំណុច B, C, D មិនរត់ត្រង់គ្នា៖

គេមាន $\overrightarrow{BC} = (-4, -2, 4)$; $\overrightarrow{BD} = (-2, 1, 6)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -16\vec{i} + 16\vec{j} - 8\vec{k} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (-16, 16, -8)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (-16, 16, -8) \neq \vec{O} = (0, 0, 0)$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{BD}$

មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា ។ ដូចនេះ B, C, D មិននៅត្រង់គ្នា ។

គណនាផ្ទៃក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ BCD ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } S_{BCD} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-16)^2 + 16^2 + (-8)^2} = 12 \text{ (ឯកតាផ្ទៃ) ។}$$

កំណត់សមីការប្លង់ (BCD) ៖

$$\text{ប្លង់ } (BCD) \text{ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ } \vec{N} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (-16, 16, -8)$$

ហើយកាត់តាម $B(2, 3, -6)$ ។

$$\text{តាមរូបមន្ត } (BCD) : a(x - x_D) + b(y - y_D) + c(z - z_D) = 0$$

$$-16(x - 2) + 16(y - 3) - 8(z + 6) = 0$$

$$-16x + 32 + 16y - 48 - 8z - 48 = 0$$

$$-16x + 16y - 8z - 64 = 0$$

$$\text{ដោយសម្រួលនឹង } -8 \text{ គេបាន } (BCD) : 2x - 2y + z + 8 = 0 \quad \text{។}$$

២) គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$ ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \right) \cdot \overrightarrow{BA} \right|$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (-16, 16, -8) \text{ និង } \overrightarrow{BA} = (-1, -1, 9) \text{ នោះ}$$

$$V_{BCDA} = \frac{1}{6} |16 - 16 + 72| = 12 \text{ (ឯកតាមាឌ)}$$

ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (BCD) ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{BCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \times d(A, (BCD))$$

$$\text{គេទាញ } d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{3 \times 12}{12} = 3 \text{ (ឯកតាប្រវែង) ។}$$

៣) កំណត់សមីការបន្ទាត់ (AH) រួចរកកូអរដោនេ H ៖

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AH) គឺ $\vec{u} = (2, -2, 1)$ ដែល $\vec{n} = (2, -2, 1)$

ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់។

$$(BCD) : 2x - 2y + z + 8 = 0 \text{ ព្រោះ } (AH) \perp (BCD) \text{ ។}$$

$$\text{តាមរូបមន្តសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិក } (AH) : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដោយ } A(1, 2, 3) \text{ និង } \vec{u} = (2, -2, 1)$$

$$\text{ដូចនេះ } (AH) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

រកកូអរដោនេ H ៖

យកសមីការ (AH) ជួសក្នុងសមីការប្លង់ (BCD) គេបាន

$$2(1 + 2t) - 2(2 - 2t) + 3 + t + 8 = 0$$

$$\text{សមមូល } 2 + 4t - 4 + 4t + 3 + t + 8 = 0$$

$$\text{គេទាញ } t = -1 \text{ យកជួសក្នុង } (AH) \text{ គេបាន } x = -1, y = 4, z = 2 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } H(-1, 4, 2) \text{ ។}$$

លំហាត់ទី៣៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរ៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយគេឲ្យមាន
ចំណុច $A(0, 2, 1), B(2, 1, -1), C(-4, 5, 3)$ និង $D(4, 6, 3)$ ។

១. ចូរស្រាយថា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

២. កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

៣. គណនា $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $ABCD$ ។

៤. ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយថា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (2, -1, -2), \overrightarrow{AC} = (-4, 3, 2)$ និង $\overrightarrow{AD} = (4, 4, 2)$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = (4, 4, 2)$ ។

២. កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរ៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, 4, 2)$

តាមរូបមន្ត $(ABC) : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$4(x - 0) + 4(y - 2) + 2(z - 1) = 0$$

ដូចនេះ $(ABC) : 2x + 2y + z - 5 = 0$ ។

៣.គណនា $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AD}|^2 = 16 + 16 + 4 = 36$ ។

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \times 36 = 6$ (ឯកតាមាឌ) ។

៤.ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ៖

គេមាន $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times d(D, (ABC))$

ដែល $d(D, (ABC)) = h$ ជាកម្ពស់នៃតេត្រាអ៊ែតគូសពីកំពូល D ។

គេទាញ $d(D, (ABC)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3 \times 6}{3} = 6$ (ឯកតាប្រវែង) ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៥

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច

$A(0,0,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

១.បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កែងទៅនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D ។

៤.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD})$ ។

៥.គណនាមាឌរបស់ពីរ៉ាមីតដែលមានកំពស់ $[AE]$ និងបាតជាចតុកោណ $ABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ៖

$A(0,0,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

និង $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C)$

នោះ $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ និង $\overrightarrow{DC}(2,0,-1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (កូអរដោនេដូចគ្នា)

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

គេមាន $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ និង $\overrightarrow{AD}(0,2,2)$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}(-2,-4,4)$ ។

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ៖

$$S_{ABCD} = \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (4)^2} = 6 \text{ (ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ) ។}$$

៣.សមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប្លង់រ៉ាវ៉េម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D

ដោយ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមនោះបួនចំនុច A, B, C, D នៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

តាង $\overrightarrow{n}$ ជារ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) នោះគេបាន៖

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}(-2,-4,4)$$

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$$(ABC): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(ABC): -2(x - 0) - 4(y - 0) + 4(z - 4) = 0$$

$$(ABC): -2x - 4y + 4z - 16 = 0$$

$$(ABC): -x - 2y + 2z - 8 = 0$$

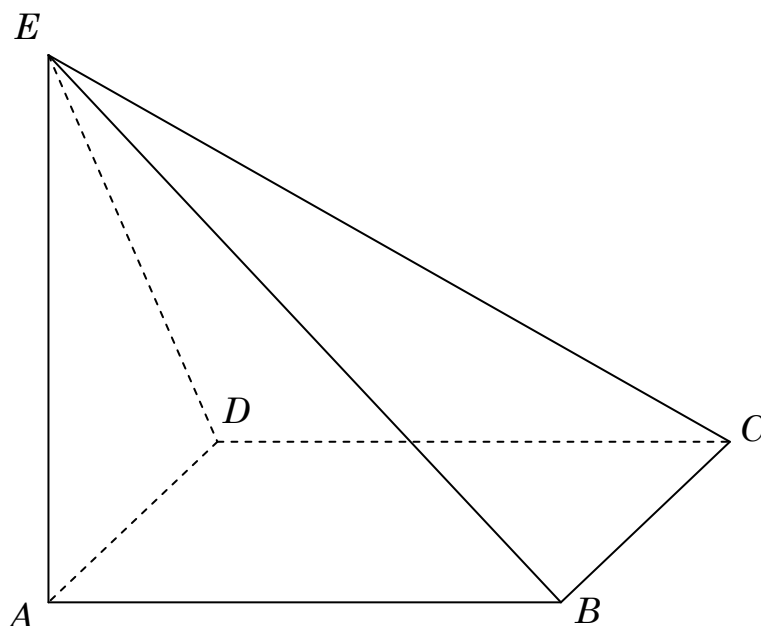
ម្យ៉ាងទៀតតាង $\overrightarrow{u}$ ជារ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ បន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}(-2,-4,4)$$

$$\text{តាមរូបមន្ត } (L): \begin{cases} x = x_D + at \\ y = y_D + bt \\ z = z_D + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $(L): \begin{cases} x = -2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 4 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

៨. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD})$



តាង $E(x_E, y_E, z_E)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AE}(x_E, y_E, z_E - 2)$ និង $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}(-2, -4, 4)$

ដោយ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD})$ នាំឱ្យ $\begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = -2 \\ z_E - 2 = 2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = -2 \\ z_E = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $E(-1, -2, 4)$ ។

៩. គណនាមាឌរបស់ពីរ៉ាមីតដែលមានកំពស់ $[AE]$ និងប្រាតជាចតុកោណ $ABCD$

យើងបាន $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \times AE$ ដោយ $S_{ABCD} = 6$ និង $AE = 3$

ដូចនេះ $V = 6$ (ឯកតាមាឌ) ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៦

ក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានបួនចំណុច៖

$A(4, 0, 0)$ $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 2)$ និង $D(4, 2, 2)$ ។

១.បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

២.ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និងសមីការនៃប្លង់កាត់តាមបី

ចំណុច A, B និង C ។

៣.យក H ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BC) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច

H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

៤.គេមានចំណុច $S(1, 6, -6)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$

រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

គេមាន $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 2)$ និង $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 2)$

ដោយ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ នោះ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

២.កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) ៖

បន្ទាត់ (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 2)$

តាមរូបមន្ត $(BC) : \begin{cases} x = x_B + at \\ y = y_B + bt \\ z = z_B + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $(BC) : \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 2t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

កំណត់សមីការនៃប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A, B និង C ៖

តាង $(P) : ax + by + cz + d = 0$ ជាប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A, B និង C

នោះកូអរដោនេនៃចំណុច A, B និង C ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (P)

$$\text{គេបានប្រព័ន្ធ} \begin{cases} 4a + d = 0 \\ -2b + d = 0 \\ 2c + d = 0 \end{cases} \text{ នាំឲ្យ } a = -\frac{d}{4}, b = \frac{d}{2}, c = -\frac{d}{2}$$

យក $a = -\frac{d}{4}, b = \frac{d}{2}, c = -\frac{d}{2}$ ជួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$$-\frac{d}{4}x + \frac{d}{2}y - \frac{d}{2}z + d = 0 \quad \text{ឬ} \quad (P) : x - 2y + 2z - 4 = 0 \quad \text{។}$$

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ៖

តាង $H(x_H, y_H, z_H)$ ។

$$\text{ដោយ } H \in (BC) \text{ នោះ } \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = -2 + 2t \\ z_H = 2t \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AH} = (-4, -2 + 2t, 2t)$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (0)(-4) + 2(-2 + 2t) + 2(2t) = 0 \text{ នោះ } t = \frac{1}{2}$$

$$\text{យក } t = \frac{1}{2} \text{ ជួសក្នុង (1) គេបាន } x_H = 0, y_H = -2 + 1 = -1, z_H = 1 \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ } H(0, -1, 1) \quad \text{។}$$

$$\text{ហើយ } AH = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2} \text{ និង } BC = \sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{គេបាន } S_{ABCD} = AH \cdot BC = (3\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 12 \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ } AH = 3\sqrt{2}, S_{ABCD} = 12 \text{ (ឯកតាផ្ទៃ) ។}$$

៤. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$ ៖

$$\overrightarrow{SA} = (3, -6, 6), \overrightarrow{AB} = (-4, -2, 0), \overrightarrow{AD} = (0, 2, 2)$$

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = -12 + 12 + 0 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\text{ហើយ } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 - 12 + 12 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{AD}$$

នោះគេទាញបាន $(SA) \perp (ABCD)$ ។

គណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times SA \text{ ដោយ } SA = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9$$

$$\text{ដូចនេះ } V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 12 \times 9 = 36 \text{ (ឯកតាមាឌ) ។}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យប្លង់

$(P): x + 2y + 2z - 4 = 0$ ។ តាង A, B និង C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P)

ជាមួយអ័ក្ស (ox) , (oy) និង (oz) រៀងគ្នា ។

១. ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A, B និង C រួចសង់ចំណុចនេះ។

២. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$ ។

៣. គណនាផលគុណស្កាលែន $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO}$ ។ ទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$

៤. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរ (S) ចារឹកក្រៅចតុមុខ $OABC$ រួចបញ្ជាក់
កូអរដោនេផ្ចិត និងកាំរបស់ស្វ៊ែរ (S) ផង។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A, B និង C រួចសង់ចំណុចនេះ

គេមាន $(P): x + 2y + 2z - 4 = 0$

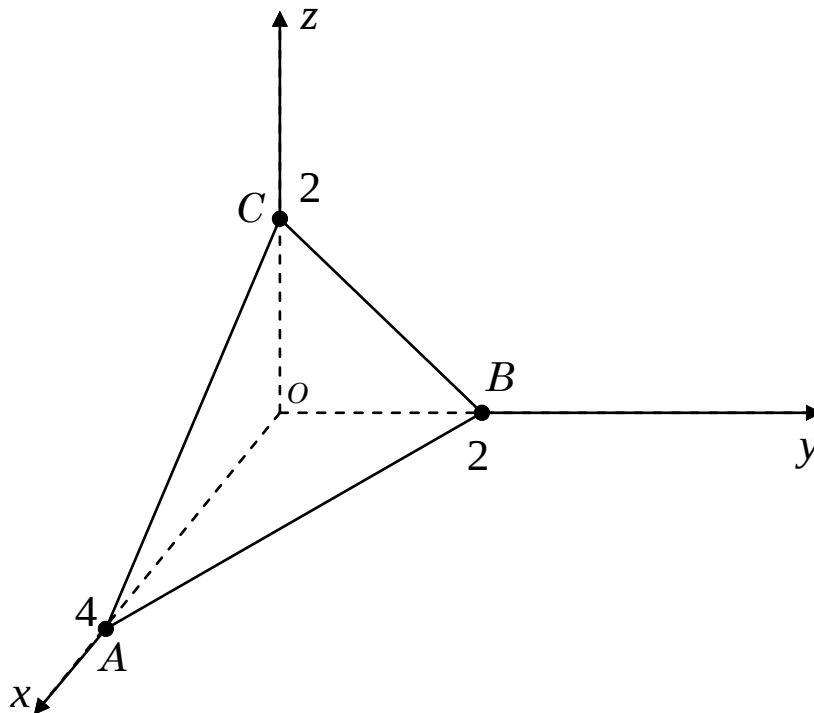
ចំពោះ $y = z = 0$ នោះ $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ គេបាន $A(4, 0, 0)$ ។

ចំពោះ $x = z = 0$ នោះ $2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ គេបាន $B(0, 2, 0)$ ។

ចំពោះ $x = y = 0$ នោះ $2z - 4 = 0 \Leftrightarrow z = 2$ គេបាន $C(0, 0, 2)$ ។

២. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (-4, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-4, 0, 2)$



យើងបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, 8, 8)$ ។

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 8^2 + 8^2} = 6$

ដូចនេះ $S_{ABC} = 6$ ខ្នាតផ្ទៃក្រឡា ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែន $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO}$

គេមាន $\overrightarrow{AO} = (-4, 0, 0)$ និង $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, 8, 8)$

យើងបាន $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO} = (-4)(4) + (0)(8) + (0)(8) = -16$

ដូចនេះ $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO} = -16$ ។

ចេញរកមាឌចតុមុខ $OABC$ ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{OABC} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO} \right| = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ } V_{OABC} = \frac{8}{3} \text{ (ខ្នាតមាឌ) ។}$$

៤. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរ (S) ចារឹកក្រៅចតុមុខ OABC ៖

តាង (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ ជាសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែរ។

ដោយស្វ៊ែរ (S) ចារឹកក្រៅចតុមុខ OABC នោះកូអរដោនេនៃចំណុច

O, A, B, C ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (S) ។

គេមាន O(0,0,0) , A(4,0,0), B(0,2,0) , C(0,0,2)

$$\text{គេបាន } \begin{cases} d = 0 \\ 16 + 4a + d = 0 \\ 4 + 2b + d = 0 \\ 4 + 2c + d = 0 \end{cases} \quad \text{សមមូល} \quad \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \\ c = -2 \\ d = 0 \end{cases}$$

គេបាន (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z = 0$

$$\text{ដូចនេះ } (S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6 \quad \text{។}$$

បញ្ជាក់កូអរដោនេផ្ចិត និងកាំរបស់ស្វ៊ែរ (S) ៖

$$\text{គេមាន } (S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6 = (\sqrt{6})^2$$

$$\text{ដូចនេះកូអរដោនេផ្ចិត } I(2,1,1) \text{ និងកាំ } R = \sqrt{6} \quad \text{។}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៨

ក្នុងតម្រុយអរតូណរ៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច

$$A(1, 2, 3) \text{ និងប្លង់ } (\alpha) : x + 2y - 2z - 8 = 0 \quad ។$$

១.កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) គូសចេញពីចំណុច A ហើយកែង

នឹងប្លង់ (β) ត្រង់ចំណុច H ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹង (α) ។

៣.កំណត់សមីការប្លង់ (β) កាត់តាមចំណុច A' ហើយស្របនឹងប្លង់ (α) ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) ៖

$$\text{ប្លង់ } (\alpha) : x + 2y - 2z - 8 = 0 \text{ មានវ៉ិចទ័រណរ៉ាល់ } \vec{n} = (1, 2, -2)$$

ដោយបន្ទាត់ $(\Delta) \perp (\alpha)$ នោះ $\vec{n} = (1, 2, -2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ

(Δ) ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម $A(1, 2, 3)$ សរសេរ ៖

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A'

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

$$(1 + t) + 2(2 + 2t) - 2(3 - 2t) - 8 = 0$$

$$1 + t + 4 + 4t - 6 + 4t - 8 = 0$$

$$9t - 9 = 0$$

គេទាញបាន $t = \frac{9}{9} = 1$ យកជួសក្នុងសមីការ (Δ) គេបាន $H(2, 4, 1)$ ។

ហើយដោយចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (α) នោះចំណុច H ជាចំណុចកណ្តាលនៃ A និង A' ។

គេបាន $x_{A'} = 2x_H - x_A = 4 - 1 = 3$, $y_{A'} = 2y_H - y_A = 8 - 2 = 6$

និង $z_{A'} = 2z_H - z_A = 2 - 3 = -1$ ។ដូចនេះ $A'(3, 6, -1)$ ។

៣. កំណត់សមីការប្លង់ (β) ៖

ដោយ $(\beta) \parallel (\alpha)$ នោះ $\vec{n} = (1, 2, -2)$ ជារ៉ឺចទ័រណរម៉ាល់នៃ (β)

ដោយ (β) កាត់តាមចំណុច $A'(3, 6, -1)$ នោះគេបាន

$$(\beta) : 1.(x - 3) - 2(y - 6) + 2(z + 1) = 0$$

$$(\beta) : x - 3 - 2y + 12 + 2z + 2 = 0$$

$$(\beta) : x - 2y + 2z + 11 = 0$$

ដូចនេះ $(\beta) : x - 2y + 2z + 11 = 0$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យពីរចំណុច $A(1, -2, 2)$ និង $B(2, 2, 1)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $|\overrightarrow{OA}|$ និង $|\overrightarrow{OB}|$ រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ OAB និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔABC ។

២.ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជាកំពូលនៃកាអ $OACB$ ។

៣.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔCAB

៤.ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB) ។

៥.គេឲ្យចំណុច $S(-1, 5, 1)$ ។ គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $SABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $|\overrightarrow{OA}|$ និង $|\overrightarrow{OB}|$ រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ OAB និងគណនាផ្ទៃ

ក្រឡារបស់ត្រីកោណនេះ

គេមាន $A(1, -2, 2)$ និង $B(2, 2, 1)$ នោះយើងបាន $\overrightarrow{OA} = (1, -2, 2)$ និង $\overrightarrow{OB} = (2, 2, 1)$ ។

យើងបាន $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (1)(2) + (-2)(2) + (2)(1) = 0$

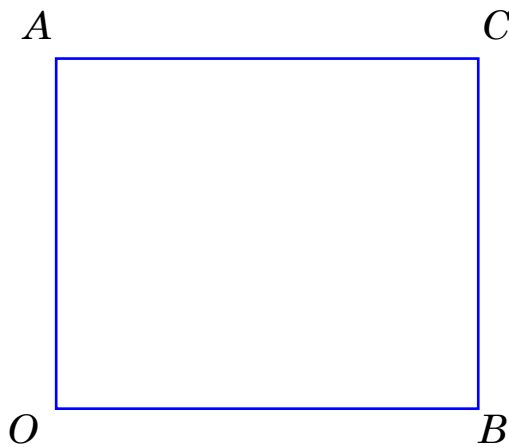
ហើយ $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1+4+4} = 3$ និង $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{4+4+1} = 3$ ដោយ

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ និង $OA = OB = 3$

ដូចនេះ OAB ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល O ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណគឺ $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$ ។

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជាកំពូលនៃកាត $OACB$



តាង $C(x_c, y_c, z_c)$ ជាកំពូលនៃកាត $OACB$ ។ គេមាន $\overrightarrow{AC} = (x_c - 1, y_c + 2, z_c - 2)$ និង $\overrightarrow{OB} = (2, 2, 1)$ ដោយ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ នោះ $\begin{cases} x_c - 1 = 2 \\ y_c + 2 = 2 \\ z_c - 2 = 1 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_c = 3 \\ y_c = 0 \\ z_c = 3 \end{cases}$ ។ ដូចនេះ $C(3, 0, 3)$

។

៣. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔCAB

គេមាន $A(1, -2, 2)$, $B(2, 2, 1)$ និង $C(3, 0, 3)$

នោះយើងបាន $\overrightarrow{CA} = (-2, -2, -1)$, $\overrightarrow{CB} = (-1, 2, -2)$

$$\text{ដូចនេះ } \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k} \quad \text{។}$$

ផ្ទៃក្រឡានៃ ΔCAB គឺ $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 9 + 36} = \frac{9}{2}$ ។

ដូចនេះ $S_{CAB} = \frac{9}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ។

៤. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការឆ្លងនៃបន្ទាត់ (AB)

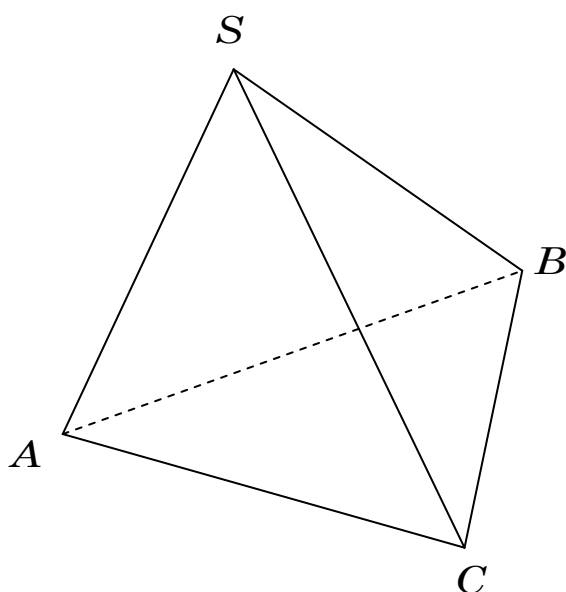
វ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = 6\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

គេបាន $6(x - 1) - 3(y + 2) - 6(z - 2) = 0$

ដូចនេះ $(ABC): 2x - y - 2z = 0$ ។

៥.គណនាមាឌត្រីកោណ $SABC$ ៖



តាមរូបមន្ត $V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CS}|$ ដោយ $\begin{cases} \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = (6, -3, -6) \\ \overrightarrow{CS} = (-4, 5, -2) \end{cases}$

យើងបាន $V = \frac{1}{6} |-24 - 15 + 12| = \frac{9}{2}$ ។

ដូចនេះ $V = \frac{9}{2}$ ឯកតាមាឌ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤០

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច

$A(1, 1, -1), B(4, -1, -3), C(-2, 5, 2)$ និង $D(3, 2, 7)$ ។

១. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A, B, C មិននៅត្រង់ត្រង់គ្នា។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៣. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) គូសចេញពី D ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ។

៤. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (ABC) ។

៥. កំណត់មាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A, B, C មិននៅត្រង់ត្រង់គ្នា

យើងមាន $A(1, 1, -1), B(4, -1, -3), C(-2, 5, 2)$ និង $D(3, 2, 7)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB} = (3, -2, -2)$ និង $\overrightarrow{AC} = (-3, 4, 3)$

$$\text{នោះ: } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \quad \text{។}$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \neq \vec{O}$ នោះ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនកូលីនេអ៊ែតគ្នា។ ដូចនេះបីចំណុច A, B, C មិននៅត្រង់ត្រង់គ្នា ។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ៖

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ នោះ $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+9+36} = 7$ ។

ដូចនេះ $S = \frac{7}{2} = 3.5$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា) ។

៣. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ៖

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ ។

តាមរូបមន្ត (ABC): $a(x - x_a) + b(y - y_a) + c(z - z_a) = 0$ ដោយ $A(1, 1, -1)$

គេបាន $2(x - 1) - 3(y - 1) + 6(z + 1) = 0$

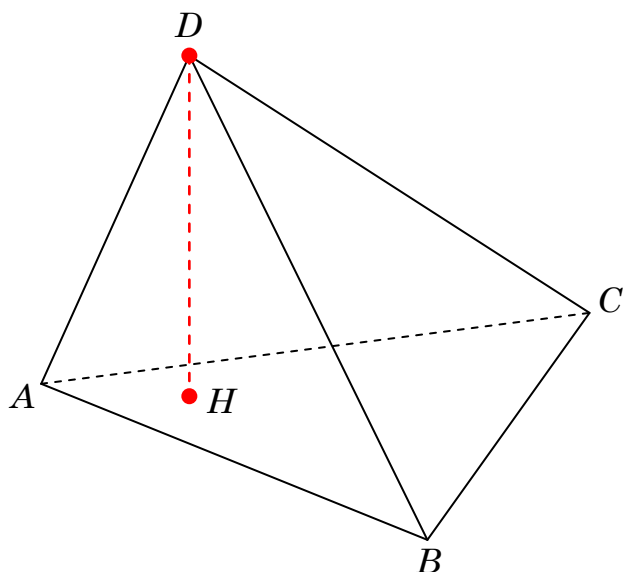
ដូចនេះ (ABC): $2x - 3y + 6z + 7 = 0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ (L) $\perp$ (ABC) នោះ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -3, 6)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់

ទិសនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាម $D(3, 2, 7)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ។

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ (L): $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 7 + 6t \end{cases}$ ដែល $t \in \mathbb{R}$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

៤. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (ABC)



$$\text{គេមាន } (L): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 7 + 6t \end{cases} \text{ និង } (ABC): 2x - 3y + 6z + 7 = 0$$

យកសមីការ (L) ជំនួសក្នុង (ABC) គេបាន៖

$$2(3 + 2t) - 3(2 - 3t) + 6(7 + 6t) + 7 = 0 \text{ សមមូល } t = -1 \text{ ។}$$

យក $t = -1$ ជំនួសក្នុងសមីការ (L) គេបាន $H(1, 5, 1)$ ។

៥. កំណត់មាឌត្រីកោណ $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| \text{ ដោយ } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -3, 6)$$

$$\text{និង } \overrightarrow{AD} = (2, 1, 8) \text{ នោះ } V = \frac{1}{6} |(2)(2) + (-3)(1) + (6)(8)| = \frac{49}{6} \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } V = \frac{49}{6} \text{ (ឯកតាមាឌ) ។}$$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀត } V = \frac{1}{3} S \times d(D, (ABC)) \text{ នោះ } d(D, (ABC)) = \frac{3V}{S} = \frac{3 \times \frac{49}{6}}{\frac{7}{2}} = 7 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } d(D, (ABC)) = 7 \text{ (ឯកតាមាឌ) ។}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤១

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេឲ្យប្លង់ $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ និងចំណុច $A(2, 4, 1)$ និង $B(-2, 8, 3)$ ។

(Q) ជាប្លង់កាត់តាមពីរចំណុច A និង B ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

(L) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ។

១. ចូររកសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ។

២. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច A លើបន្ទាត់ (L) ហើយ A' ជាចំណុច

ឆ្លុះគ្នានៃ A ធៀបនឹងបន្ទាត់ (L) ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង A' ។

៣. រកកូអរដោនេនៃចំណុច M ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L) ដោយដឹងថា $AM + BM$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

១. រកសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L)

វ៉ិចទ័ររម៉ាល់របស់ប្លង់ $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ គឺ $\vec{n}_P = (1, 2, -2)$

វ៉ិចទ័ររម៉ាល់របស់ប្លង់ (Q) កាត់តាមពីរចំណុច A និង B ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) គឺ

$$\vec{n}_Q = \vec{n}_P \times \overrightarrow{AB}$$

ដោយ $A(2, 4, 1)$ និង $B(-2, 8, 3)$ នោះ $\overrightarrow{AB} = (-4, 4, 2)$ ។

$$\text{គេបាន } \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$$

សមីការប្លង់(Q)អាចសរសេរ $12(x-2)+6(y-4)+12(z-1)=0$ ឬ

$$2x+y+2z-10=0$$

ដូចនេះ (Q): $2x+y+2z-10=0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(P)និងប្លង់(Q)គឺជាសំណុំចម្លើយនៃប្រព័ន្ធ

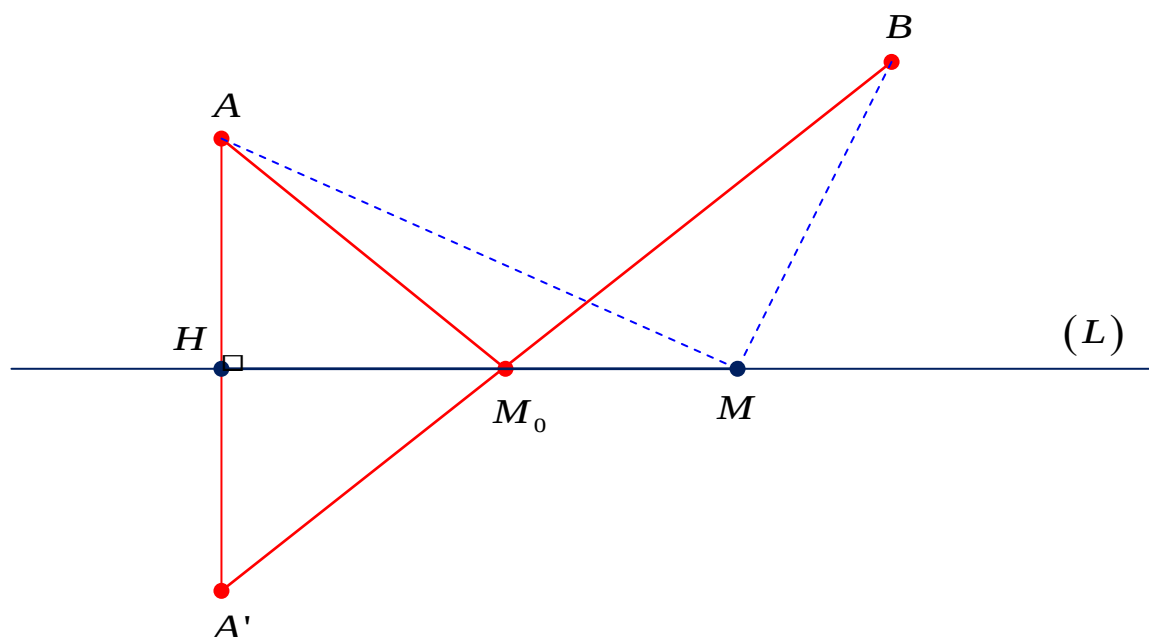
$$\begin{cases} x+2y-2z+1=0 \\ 2x+y+2z-10=0 \end{cases} \quad \text{យក } x=t \in \mathbb{R} \text{ គេបាន } \begin{cases} t+2y-2z+1=0 & (1) \\ 2t+y+2z-10=0 & (2) \end{cases}$$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $3t+3y-9=0$ នោះ $y=3-t$ យកជួសក្នុង(2)គេបាន

$$2t+3-t+2z-10=0 \text{ គេទាញ } z=\frac{7}{2}-\frac{t}{2} \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } (L): \begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=\frac{7}{2}-\frac{t}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង A'



តាង $H(x_H, y_H, z_H)$ ជាចំណុចត្រូវរក។ ដោយ $H \in (L)$ នោះកូអរដោនេនៃ H ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការនៃបន្ទាត់ (L) គឺ

$$\begin{cases} x_H = t \\ y_H = 3 - t \\ z_H = \frac{7}{2} - \frac{t}{2} \end{cases} \quad (1)$$

គេមាន $\overrightarrow{AH} = \left(t - 2, -t - 1, \frac{5}{2} - \frac{t}{2} \right)$ ហើយវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L) គឺ

$$\vec{u}_L = \left(1, -1, -\frac{1}{2} \right)$$

ដោយ $\overrightarrow{AH} \perp (L)$ និង $\vec{u}_L // (L)$ នោះ $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_L \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_L = 0$

$$\text{គេបាន } (1)(t - 2) + (-1)(-t - 1) + \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2} \right) = 0$$

$$t - 2 + t + 1 - \frac{5}{4} + \frac{t}{4} = 0$$

$$-\frac{9}{4} + \frac{9t}{4} = 0$$

គេទាញបាន $t = 1$ យកជួសក្នុង (1) នោះ $H(1, 2, 3)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ A' ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃ A ធៀបនឹងបន្ទាត់ (L) នោះ H ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AA']$ ៖

$$\text{គេបាន } \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 2 - 2 = 0 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 4 - 4 = 0 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 6 - 1 = 5 \end{cases}$$

ដូចនេះ $H(1, 2, 3)$ និង $A'(0, 0, 5)$ ។

៣. រកកូអរដោនេចំណុច M នៅលើ (L) ដោយដឹងថា $AM + BM$ មានតម្លៃអប្បបរមា ៖

តាង M_0 ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (BA') និងបន្ទាត់ (L) ។

ចំពោះគ្រប់ចំណុច $M \in (L)$ គេមាន $AM + BM \geq AM_0 + BM_0 = BM_0 + M_0A'$

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ $AM + BM$

មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែចំណុច M ត្រួតស៊ីគ្នាជាមួយនឹងចំណុច M_0 គឺ $M \equiv M_0$ ។

សមីការបន្ទាត់ (BA') : $\frac{x - x_{A'}}{x_{A'} - x_B} = \frac{y - y_{A'}}{y_{A'} - y_B} = \frac{z - z_{A'}}{z_{A'} - z_B}$

ដោយ $A'(0,0,5)$ និង $B(-2,8,3)$

នោះ (BA') : $\frac{x}{-2} = \frac{y}{8} = \frac{z-5}{-2}$ ឬ នោះ (BA') : $\frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-1}$

តាង $\frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-1} = u$ នោះ (BA') : $\begin{cases} x = -u \\ y = 4u \\ z = -u + 5, u \in \mathbb{R} \end{cases}$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) គឺ (L) : $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = \frac{7}{2} - \frac{t}{2}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

ផ្អែមសមីការ (BA') និង (L) គេបាន $\begin{cases} -u = t \\ 4u = 3 - t \\ -u + 5 = \frac{7}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} -u - t = 0 \\ 4u + t = 3 \\ -2u + t = -3 \end{cases}$

នោះ $u = 1, t = -1$ ។ យក $u = 1$ ជួសក្នុងសមីការ (BA') គេបានចំណុចប្រសព្វ

រវាង $(BA') \& (L)$ គឺ $M_0(-1, 4, 4)$ ។

ដូចនេះ $AM + BM$ មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $M \equiv M_0(-1, 4, 4)$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យប្លង់ $(p): x + 2y - 2z + 1 = 0$ និងចំណុចពីរ $A(2, 4, 1)$ និង $B(6, 0, -1)$

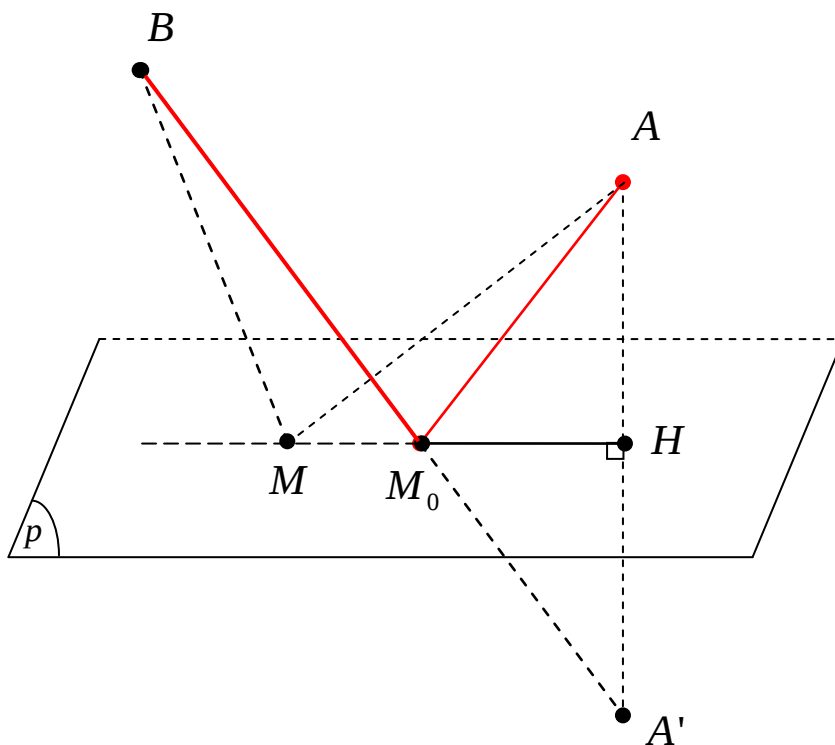
ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច M ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (p) ដោយដឹងថា $MA + MB$

មានតម្លៃអប្បបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

រកកូអរដោនេនៃចំណុច M

តាង (L) ជាបន្ទាត់កាត់តាម A ហើយកែងនឹងប្លង់ (p) ត្រង់ (H) នោះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (1, 2, -2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់។



សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់អាចសរសេរ $(L): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

យកសមីការ (L) ជួសក្នុង (p) គេបាន៖

$$(2+t)+2(4+2t)-2(1-2t)+1=0$$

$$2+t+8+4t-2+4t+1=0$$

$$9t+9=0$$

$$t=-1$$

យក $t=-1$ ជួសក្នុង (L) គេបាន $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$ នោះ $H(1,2,3)$ ។

យក A' ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃ A ធៀបនឹងប្លង់ (p) នោះ H ជាចំណុចកណ្តាលនៃ

$$[AA'] \text{ ។ គេបាន } \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 2 - 2 = 0 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 4 - 4 = 0 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 6 - 1 = 5 \end{cases} \text{ នោះ } A'(0,0,5) \text{ ។}$$

យក M_0 ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (BA') និងប្លង់ (p) ។

ចំពោះគ្រប់ចំណុច $M \in (p)$ គេមាន ៖

$$AM + BM \geq AM_0 + BM_0 = BM_0 + M_0A'$$

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ $AM + BM$ មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $M \equiv M_0$ ។

កូអរដោនេនៃចំណុច M_0 ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (BA') និងប្លង់ (p) ។

បន្ទាត់ (BA') មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BA'} = (-6, 0, 6)$ នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

$$\text{របស់វាអាចសរសេរ}(BA') : \begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = 0 \\ z = -1 + 6t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

យកសមីការ (BA') ជួសក្នុង (p) គេបាន $6 - 6t + 0 + 2 - 12t + 1 = 0$

នោះ $t = \frac{1}{2}$ ជួសក្នុង (BA') គេបាន $M_0(3, 0, 2)$ ។

ដូចនេះ $M \equiv M_0(3, 0, 2)$ ។

លំហាត់ទី៤៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច $A(2, 4, -5), B(6, -4, 3), C(-1, 1, 7)$ និង $D(-4, 7, 1)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{AD}$ រួចគណនា រង្វាស់នៃជ្រុងនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

២.ចូរបង្ហាញថា $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទ នៃចតុកោណ $ABCD$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

៣.តាង E ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។ គណនា EC និង ED ។

៤.គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC និង ACD ។

៥.រកសមីការនៃប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{AD}$ រួចគណនារង្វាស់នៃ

ជ្រុងនៃចតុកោណ $ABCD$ ៖

គេមាន $A(2, 4, -5), B(6, -4, 3), C(-1, 1, 7)$ និង $D(-4, 7, 1)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (6, -4, 3) - (2, 4, -5) = (4, -8, 8)$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (-1, 1, 7) - (6, -4, 3) = (-7, 5, 4)$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (-4, 7, 1) - (-1, 1, 7) = (-3, 6, -6)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (-4, 7, 1) - (2, 4, -5) = (-6, 3, 6)$$

ហើយ $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 64 + 64} = \sqrt{144} = 12$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{49 + 25 + 16} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

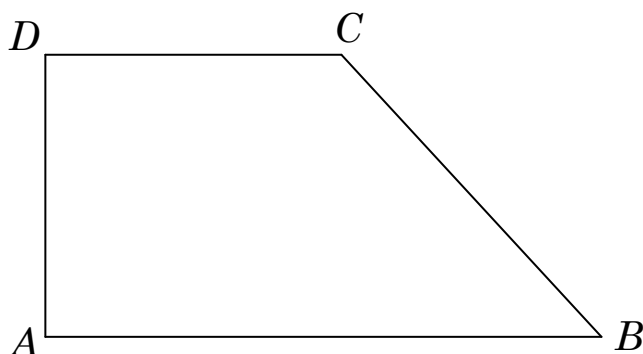
$$CD = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9$$

$$AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{36 + 9 + 36} = \sqrt{81} = 9$$

ដូចនេះ $AB = 12$, $BC = 3\sqrt{10}$, $CD = 9$, $AD = 9$ (ឯកតាប្រវែង) ។

២.បង្ហាញថា $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ និង $\overline{AB} // \overline{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ

$ABCD$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា៖



យើងមាន $\overline{AB} = (4, -8, 8)$ និង $\overline{AD} = (-6, 3, 6)$

យើងបាន $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = (4)(-6) + (-8)(3) + (8)(6) = -24 - 24 + 48 = 0$

សមមូល $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ ពិត។

ម្យ៉ាងទៀត $\overline{AB} = (4, -8, 8)$ និង $\overline{CD} = (-3, 6, -6)$

ដោយ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{4}{-3} = \frac{-8}{6} = \frac{8}{-6}$ នោះ $\overline{AB} // \overline{CD}$ ពិត។

ដូចនេះ $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ និង $\overline{AB} // \overline{CD}$ ។ ចតុកោណ $ABCD$ មាន $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ និង $\overline{AB} // \overline{CD}$ ជាចតុកោណញ្ជាយកែង។

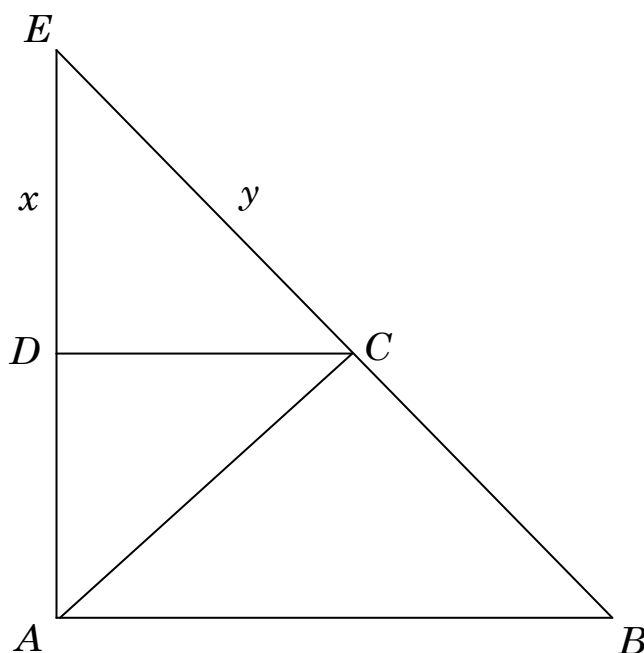
ផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណញ្ជាយនេះគឺ ៖

$$S = \frac{(AB + CD) \times AD}{2} = \frac{(12 + 9)(9)}{2} = 94.5 \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រលា។}$$

៣.គណនា EC និង ED ៖

យើងតាង $ED = x$ និង $EC = y$ ។ ត្រីកោណកែង ABE និង DCE

មានមុំ E រួមនោះវាជាត្រីកោណកែងដូចគ្នា។



យើងបានផលធៀបដំណូច $\frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB}$

សមមូល $\frac{x}{x+9} = \frac{y}{y+3\sqrt{10}} = \frac{9}{12}$ នាំឲ្យគេទាញ $x = 27$, $y = 9\sqrt{10}$ ។

ដូចនេះ $ED = 27$, $EC = 9\sqrt{10}$ ។

៤.គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC និង ACD ៖

យើងមាន $\overrightarrow{AB} = (4, -8, 8)$ និង $\overrightarrow{AC} = (-3, -3, 12)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -8 & 8 \\ -3 & -3 & 12 \end{vmatrix} = -72\vec{i} - 72\vec{j} - 36\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-72, -72, -36)$ ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC គឺ $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{72^2 + 72^2 + 36^2} = 54$ ។

ហើយ $S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ABC} = 94.5 - 54 = 40.5$ ។

ដូចនេះ $S_{ABC} = 54$, $S_{ACD} = 40.5$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)។

៥. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ៖

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-72, -72, -36)$ ។

សមីការប្លង់នេះអាចសរសេរតាមរូបមន្ត៖

$$(ABC) : a(x - x_a) + b(y - y_a) + c(z - z_a) = 0 \quad \text{ដែល } A(2, 4, -5)$$

$$(ABC) : -72(x - 2) - 72(y - 4) - 36(z + 5) = 0$$

$$(ABC) : 2x - 4 + 2y - 8 + z + 5 = 0$$

$$(ABC) : 2x + 2y + z - 7 = 0$$

ហើយបន្ទាត់ (AD) និង (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា $\overrightarrow{AD} = (-6, 3, 6)$

និង $\overrightarrow{BC} = (-7, 5, 4)$ នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ពីរនេះអាចសរសេរ៖

$$(AB) : \begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 4 + 3t \\ z = -5 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{និង} \quad (BC) : \begin{cases} x = 6 - 7t' \\ y = -4 + 5t' \\ z = 3 + 4t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់និងស្វ៊ែរមានសមីការ

$$(L): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{2} \text{ និង } (S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយរួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ

បន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំនុច $M_0(1; 4; 3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

$$\vec{u}(-2; 3; 2) \text{ ។}$$

ស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $I(1; -1; 2)$ និងកាំ $R=3$ ។

$$\text{ចម្ងាយពីចំនុច } I \text{ ទៅបន្ទាត់ } (L) \text{ គឺ } d(I; (L)) = \frac{|\overrightarrow{AM_0} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{IM_0} = (0; 5; 1) \text{ គេបាន } \overrightarrow{IM_0} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\text{គេទាញ } d(I; (L)) = \frac{\sqrt{7^2 + (-2)^2 + 10^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 2^2}} = \sqrt{\frac{153}{17}} = 3$$

$$\text{ដោយ } d(I; (L)) = R = 3 \text{ ។}$$

ដូចនេះបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំនុច A មួយ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ខាងលើ

$$\text{តាង } \frac{x-1}{-2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t + 4 \\ z = 2t + 3 \end{cases} \quad (1)$$

យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុងសមីការស្វ័យ (S) គេបាន

$$(-2t)^2 + (3t + 5)^2 + (2t + 1)^2 = 9$$

$$4t^2 + 9t^2 + 30t + 25 + 4t^2 + 4t + 1 - 9 = 0$$

$$17t^2 + 34t + 17 = 0$$

$$17(t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1$$

យក $t = -1$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $A(3; 1; 1)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៥

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១ ។ លំហមានទិសដៅតាម

តម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ គេតាង

I, J, K ជាបីចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ ។

១. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I, J, K ។

២. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK ។

៣. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK ។

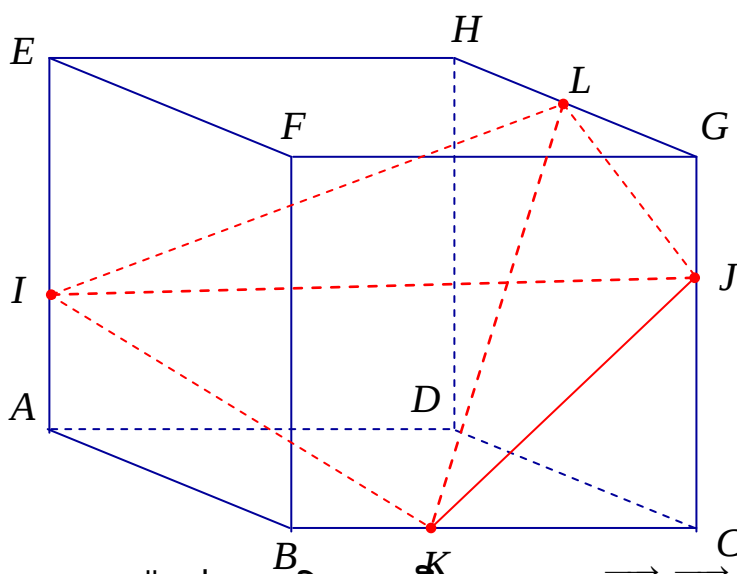
៤. L ជាចំណុចមួយនៃ $[GH]$ ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LJ}$ អប្បបរមា។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L ។

៥. ចូរស្រាយថាបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I, J, K



ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ យើងបាន៖

$A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), E(0,0,1), F(1,0,1), G(1,1,1)$ និង $H(0,1,1)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$

នោះយើងបាន $I(0,0,\frac{1}{3}), J(1,1,\frac{2}{3})$ និង $K(1,\frac{1}{3},0)$ ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែរ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK

យើងមាន $\overrightarrow{KI} = (-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \overrightarrow{KJ} = (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

នោះយើងបាន $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ} = (-1)(0) + (-\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) + (\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) = 0 - \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0$

ដូចនេះ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ} = 0$ ។ ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{KI} \perp \overrightarrow{KJ}$

នោះត្រីកោណ IJK ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល K ។

៣.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK

យើងមាន $\overrightarrow{KI} = (-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \overrightarrow{KJ} = (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

យើងបាន $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{AE} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = (-\frac{2}{9} - \frac{2}{9})\overrightarrow{AB} - (-\frac{2}{3} - 0)\overrightarrow{AD} + (-\frac{2}{3} - 0)\overrightarrow{AE}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ} = -\frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK ឲ្យតាមរូបមន្ត ៖

$S_{IJK} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{22}}{9}$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា) ។

៤.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L

ដោយ L ជាចំណុចមួយនៃ $[GH]$ នោះគេបាន $L(x_0, 1, 1)$ ដែល $0 < x_0 < 1$ ។

យើងមាន $\overrightarrow{LI} = (-x_0, -1, -\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{LJ} = (1-x_0, 0, -\frac{1}{3})$

យើងបាន $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LJ} = -x_0(1-x_0) + (-1)(0) + (-\frac{2}{3})(-\frac{1}{3})$

$$= -x_0 + x_0^2 + 0 + \frac{2}{9} = (x_0 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{36}$$

ដើម្បីឲ្យផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LJ} = (x_0 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{36}$

អប្បបរមាលុះត្រាតែ $(x_0 - \frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ ។

ចំពោះ $x_0 = \frac{1}{2}$ នោះ $L(\frac{1}{2}, 1, 1)$ ។

៥. ស្រាយថាបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ

យើងមាន $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ} = (-\frac{4}{9}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ និង $\overrightarrow{KL} = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1)$

យើងបាន $(\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}) \cdot \overrightarrow{KL} = (-\frac{4}{9})(-\frac{1}{2}) + (\frac{2}{3})(\frac{2}{3}) + (-\frac{2}{3})(1)$

$$= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2+4-6}{9} = 0$$

ដោយ $(\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}) \cdot \overrightarrow{KL} = 0$ នោះបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ K, L និង M ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ $[EF], [CD]$ និង $[DH]$ ។

១) គណនាផលគុណស្កាលែន $\vec{MK} \cdot \vec{ML}$ រួចទាញរកឈ្មោះនៃ ΔKLM

២) P ជាចំណុចមួយនៃ $[EH]$ ហើយគេតាង $\angle KPL = \varphi$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ទីតាំងនៃ P ប្រែប្រួលក្នុង $[EH]$ គេមាន $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ។

តើពេលណាទើបគេបាន $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ។

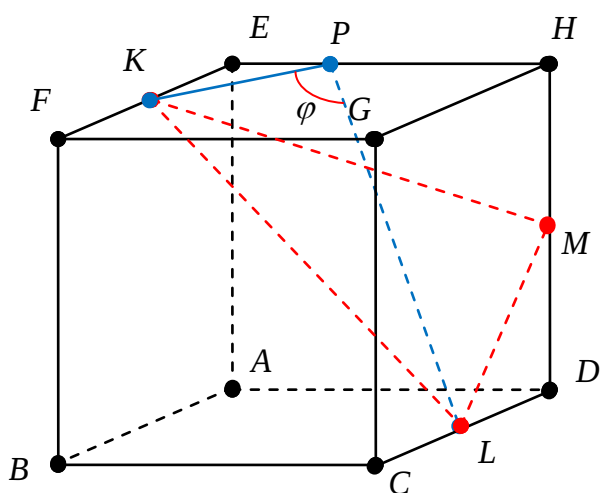
ដំណោះស្រាយ

១) គណនាផលគុណស្កាលែន $\vec{MK} \cdot \vec{ML}$ រួចទាញរកឈ្មោះនៃ ΔKLM ៖

ជ្រើសរើសតម្រុយ $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ ។

យើងមាន $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0)$

$E(0, 0, 1), F(1, 0, 1), G(1, 1, 1), H(0, 1, 1)$ ។



ដោយ K, L និង M ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ $[EF], [CD]$ និង $[DH]$

នោះគេបាន $K(\frac{1}{2}, 0, 1), L(\frac{1}{2}, 1, 0), M(0, 1, \frac{1}{2})$ ។

គេមាន $\overrightarrow{MK} = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{ML} = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$

យើងបាន $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{4} = 0$ ។ ដោយ $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{ML}$ ។

ដូចនេះ KLM ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M ។

២) ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ទីតាំងនៃ P ប្រែប្រួលក្នុង $[EH]$ គេមាន $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$

ដោយ P ជាចំណុចមួយនៃ $[EH]$ នោះគេបាន $P(0, t, 1)$

ដែល $EP = t$, $0 \leq t \leq 1$ ។ គេមាន $\overrightarrow{PK} = (\frac{1}{2}, -t, 0)$, $\overrightarrow{PL} = (\frac{1}{2}, 1-t, -1)$

គេបាន $\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{PL} = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) - t(1-t) + (0)(-1) = \frac{1}{4} - t + t^2 = \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \geq 0$

គ្រប់ $t \in [0, 1]$ ។

ដោយ $\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{PL} \geq 0$ នោះមុំ $\angle KPL = \varphi$ ជាមុំស្រួច ឬ មុំកែង ។

ដូចនេះ គ្រប់ទីតាំងនៃ P ប្រែប្រួលក្នុង $[EH]$ គេមាន $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ។

តើពេលណាទើបគេបាន $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ៖

ដោយ $\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{PL} = \left(\frac{1}{2} - t\right)^2$

នោះដើម្បីឲ្យ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ លុះត្រាតែ $\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{PL} = \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

ចំពោះ $t = \frac{1}{2}$ គេបាន $P(0, \frac{1}{2}, 1)$ នោះ P ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[EH]$ ។

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ លុះត្រាតែ P ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[EH]$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១ ។ លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយ អវតួនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ យក I, J, K និង L ជាចំណុច កណ្តាលរៀងគ្នា នៃ $[EF], [BC], [DH]$ និង $[BF]$ ។

១. ចូរស្រាយបំភ្លឺថា IJK ជាត្រីកោណសមង្វ័ន្ធ។

២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle IJK$ ។

៣. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (IJ) និង (KL) អវតួកូណាល់គ្នា។

៤. គណនារង្វាស់មុំ $\angle ILJ$ ។

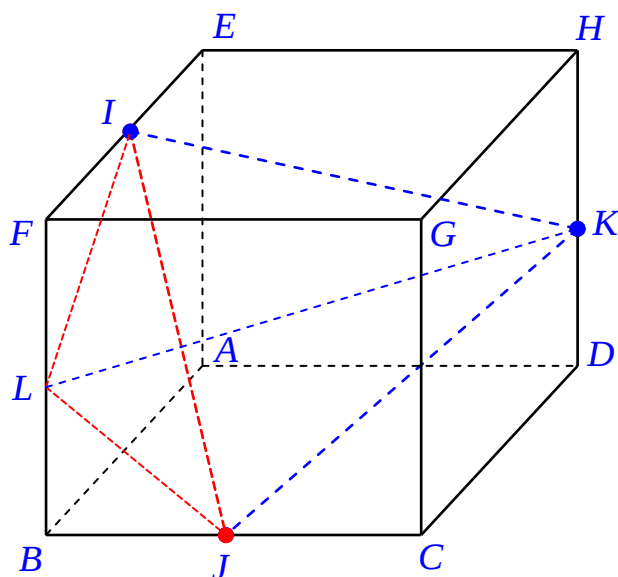
៥. គណនាផលគុណស្កាលែន $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{JK}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ILK និងត្រីកោណ JKL ។

៦. គណនា $(\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}) \cdot \overrightarrow{IL}$ រួចទាញថាចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយបំភ្លឺថា IJK ជាត្រីកោណសមង្វ័ន្ធ

ក្នុងតម្រុយអវតួនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ ។



ដោយ I, J, K និង L ជាចំណុចកណ្តាលនៃទ្រនុង $[EF], [BC], [DH]$

និង $[BF]$ នោះយើងបាន $I\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), J\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), K\left(0, 1, \frac{1}{2}\right), L\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$

យើងមាន $\overrightarrow{IJ} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right), \overrightarrow{IK} = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ និង $\overrightarrow{JK} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

យើងបាន $|\overrightarrow{IJ}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}, |\overrightarrow{IK}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

និង $|\overrightarrow{JK}| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ នោះ $|\overrightarrow{IJ}| = |\overrightarrow{IK}| = |\overrightarrow{JK}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ។

ដូចនេះ IJK ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

២.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔIJK

យើងមាន $A(0, 0, 0), G(1, 1, 1)$ នោះ $\overrightarrow{AG} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ (1) ។

$$\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k} = \frac{3}{4}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \quad (2)$$

តាម(1)&(2) យើងបាន $\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ ពិត។

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម ៖

$$S_{IJK} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (\text{ឯកតាផ្ទៃ})$$

៣.ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (IJ) និង (KL) អន្តរក្នុងរាងកាយ

យើងមាន $\overrightarrow{IJ} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$ និង $\overrightarrow{KL} = (1, -1, 0)$ នោះយើងបាន

$$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{KL} \text{ ។}$$

ដូចនេះបន្ទាត់ (IJ) និង (KL) អនុកូណាល់គ្នា។

៤. គណនារង្វាស់មុំ $\angle ILJ$

យើងមាន $\overrightarrow{LI} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ និង $\overrightarrow{LJ} = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$\text{នោះ: } \overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LJ} = 0 + 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{និង } |\overrightarrow{LI}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, |\overrightarrow{LJ}| = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{យើងបាន } \cos \angle ILJ = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2} \text{ នោះ: } \angle ILJ = 120^\circ \text{ ។}$$

៥. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{JK}$

យើងមាន $\overrightarrow{IL} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IK} = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

$$\text{នោះយើងបាន } \overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IK} = -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = 0 \text{ ។}$$

ហើយ $\overrightarrow{JL} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{JK} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\text{នោះយើងបាន } \overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{JK} = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IK} = 0$ និង $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{JK} = 0$ ។

ទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ILK និងត្រីកោណ JLK

ដោយ $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IL} \perp \overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{JK} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{JL} \perp \overrightarrow{JK}$ ។

ដូចនេះត្រីកោណ ILK និង JLK ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល I & J រៀងគ្នា។

៦.គណនា $(\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}) \cdot \overrightarrow{IL}$

យើងមាន $\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK} = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $\overrightarrow{IL} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ នោះយើងបាន

$$(\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}) \cdot \overrightarrow{IL} = \frac{3}{8} + 0 - \frac{3}{8} = 0 \quad \text{។}$$

ទាញថាបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ៖

យើងមាន $(\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}) \cdot \overrightarrow{IL} = 0$ នោះ $(\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}) \perp \overrightarrow{IL}$

ដោយ $\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}$ ជាវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (IJK) នោះគេទាញ $L \in (IJK)$ ។

ដូចនេះបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៨

គូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១ ។ លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយ

អត្តនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ គេតាង I, J, K

ជាបីចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ ។

១. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I, J, K ។

២. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK

៣. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK

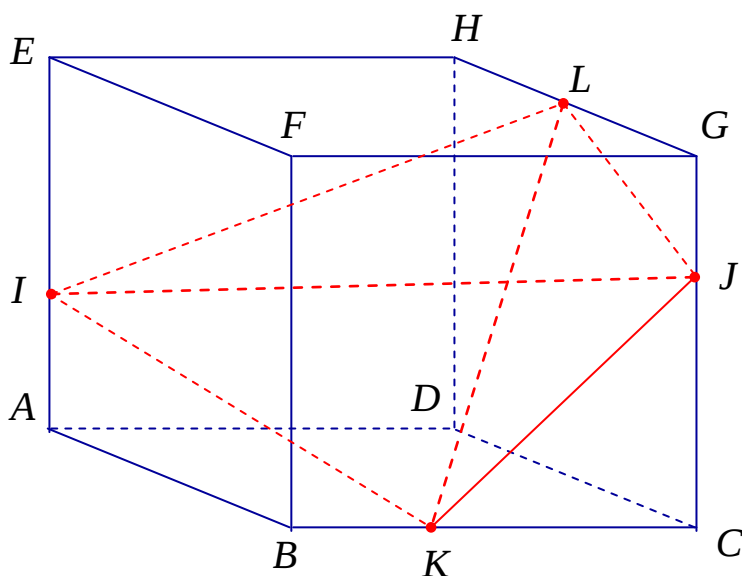
៤. L ជាចំណុចមួយនៃ $[GH]$ ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LJ}$ អប្បបរមា។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L ។

៥. ចូរស្រាយថាបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I, J, K



ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ យើងបាន៖
 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), E(0,0,1), F(1,0,1), G(1,1,1)$ និង
 $H(0,1,1)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ នោះយើងបាន ៖
 $I(0,0,\frac{1}{3}), J(1,1,\frac{2}{3})$ និង $K(1,\frac{1}{3},0)$ ។

២. គណនាផលគុណស្កាលែរ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK

យើងមាន $\overrightarrow{KI} = (-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \overrightarrow{KJ} = (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

យើងបាន $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ} = (-1)(0) + (-\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) + (\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) = 0 - \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0$

ដូចនេះ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ} = 0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{KI} \perp \overrightarrow{KJ}$ នោះត្រីកោណ IJK
 ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល K ។

៣. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK

យើងមាន $\overrightarrow{KI} = (-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \overrightarrow{KJ} = (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

យើងបាន

$$\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{AE} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = (-\frac{2}{9} - \frac{2}{9})\overrightarrow{AB} - (-\frac{2}{3} - 0)\overrightarrow{AD} + (-\frac{2}{3} - 0)\overrightarrow{AE}$$

$$\text{ដូចនេះ } \overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ} = -\frac{4}{9} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AE} \text{ ។}$$

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK ឲ្យតាមរូបមន្ត ៖

$$S_{IJK} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{22}}{9} \text{ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា) ។}$$

៨. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L

ដោយ L ជាចំណុចមួយនៃ $[GH]$ នោះគេបាន $L(x_0, 1, 1)$ ដែល $0 < x_0 < 1$ ។

$$\text{យើងមាន } \overrightarrow{LI} = (-x_0, -1, -\frac{2}{3}), \overrightarrow{LJ} = (1-x_0, 0, -\frac{1}{3})$$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } \overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LJ} &= -x_0(1-x_0) + (-1)(0) + (-\frac{2}{3})(-\frac{1}{3}) \\ &= -x_0 + x_0^2 + 0 + \frac{2}{9} = (x_0 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{36} \end{aligned}$$

$$\text{ដើម្បីឲ្យផលគុណស្កាលែន } \overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LJ} = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{36} \text{ អប្បបរមាលុះត្រាតែ}$$

$$\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \text{ ។}$$

$$\text{ចំពោះ } x_0 = \frac{1}{2} \text{ នោះ } L(\frac{1}{2}, 1, 1) \text{ ។}$$

៩. ស្រាយថាបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ

$$\text{យើងមាន } \overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ} = (-\frac{4}{9}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \text{ និង } \overrightarrow{KL} = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } (\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}) \cdot \overrightarrow{KL} &= (-\frac{4}{9})(-\frac{1}{2}) + (\frac{2}{3})(\frac{2}{3}) + (-\frac{2}{3})(1) \\ &= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2+4-6}{9} = 0 \end{aligned}$$

ដោយ $(\overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{KJ}) \cdot \overrightarrow{KL} = 0$ នោះបួនចំណុច I, J, K, L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

ផ្ចិតកាវេ $CDHG$ នោះ $K(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ ។ M និង N ជាចំណុចពីរនៃទ្រនុង $[BC]$ និង $[BF]$ រៀងគ្នានោះ $M(1, b, 0)$ និង $N(1, 0, c)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{MI} = (-1, \frac{1}{2} - b, 1)$, $\overrightarrow{MK} = (-\frac{1}{2}, 1 - b, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{NI} = (-1, \frac{1}{2}, 1 - c)$

និង $\overrightarrow{NK} = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} - c)$ ។

យើងមាន $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - b)(1 - b) + \frac{1}{2} = b^2 - \frac{3}{2}b + \frac{3}{2} = (b - \frac{3}{4})^2 + \frac{15}{16}$

និង $\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{NK} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (1 - c)(\frac{1}{2} - c) = (c - \frac{3}{4})^2 + \frac{15}{16}$ ។

ដោយដឹងថា $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MK}$ និង $\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{NK}$ មានតម្លៃអប្បបរមានោះយើងបាន ៖

$b = \frac{3}{4}$ និង $c = \frac{3}{4}$ នោះគេបាន $M(1, \frac{3}{4}, 0)$ និង $N(1, 0, \frac{3}{4})$ ។

យើងមាន $\overrightarrow{IK} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{IM} = (1, \frac{1}{4}, -1)$, $\overrightarrow{IN} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

យើងបាន $(\overrightarrow{IM} \times \overrightarrow{IN}) \cdot \overrightarrow{IK} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{32}$

ដោយ $(\overrightarrow{IM} \times \overrightarrow{IN}) \cdot \overrightarrow{IK} = -\frac{9}{32} \neq 0$ នោះបួនចំណុច I, M, N, K មិនស្ថិតនៅ

ក្នុងប្លង់តែមួយទេ។

ដូចនេះមានឧត្តេត្រាអ៊ីតដែលមានកំពូល I, M, N, K កំណត់ដោយ ៖

$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{IM} \times \overrightarrow{IN}) \cdot \overrightarrow{IK}| = \frac{1}{6} \times \frac{9}{32} = \frac{3}{64} \text{ cm}^3$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេឲ្យគូប $ABCD$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ I ជាចំណុចកណ្តាល $[EF]$

$J \in [BC]$ ដែល $IJ \perp IH$ ហើយ $K \in [CD]$ ដែល $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$ ។

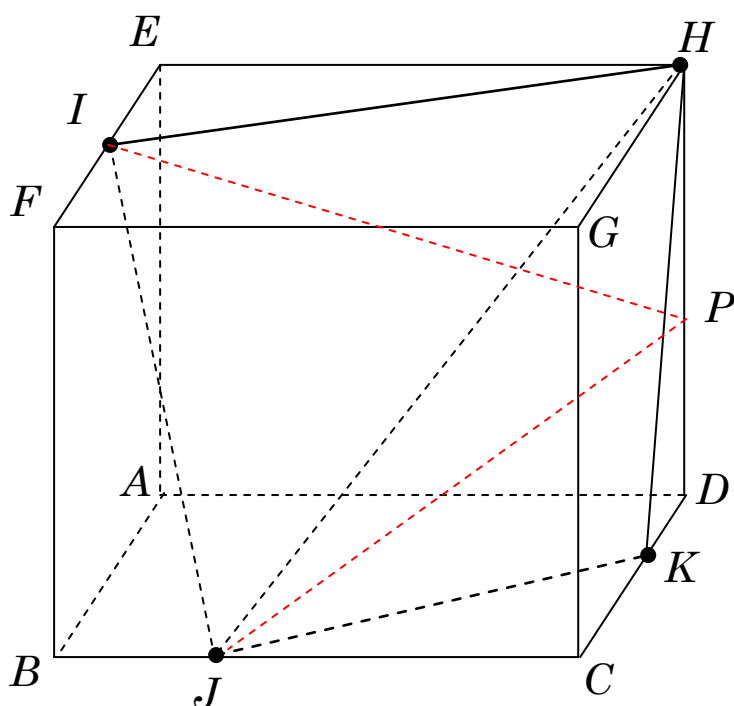
១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបួនចំណុច H, I, J, K ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

២. រកទីតាំងនៃចំណុច $P \in [DH]$ ដោយដឹងថា $\overrightarrow{PI} \cdot \overrightarrow{PJ}$ មានតម្លៃតូចបំផុត។

ដំណោះស្រាយ

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបួនចំណុច H, I, J, K ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ

យើងជ្រើសរើសតម្រុយអក្ខរណ៍មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$



ដោយ I ជាចំណុចកណ្តាល $[EF]$ នោះ $I(\frac{1}{2}, 0, 1)$ ហើយ $J \in [BC]$ នោះ

$J(1, b, 0)$ ។ គេមាន $\overrightarrow{IJ} = (\frac{1}{2}, b, -1)$ និង $\overrightarrow{IH} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$ ។

ដោយ $IJ \perp IH$ នោះគេបាន $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IH} = -\frac{1}{4} + b + 0 = 0$ នោះ $b = \frac{1}{4}$ ។ គេបាន $J(1, \frac{1}{4}, 0)$ ។

ហើយ $K \in [CD]$ ដែល $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$ នោះ $\overrightarrow{KD} = \frac{5}{8}\overrightarrow{CD}$ ឬ $\overrightarrow{DK} = \frac{5}{8}\overrightarrow{DC}$

គេបាន $K(\frac{5}{8}, 1, 0)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{IJ} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -1)$, $\overrightarrow{IK} = (\frac{1}{8}, 1, -1)$ និង $\overrightarrow{IH} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$ ។

$$\text{គេបាន } (\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}) \cdot \overrightarrow{IH} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{8} & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(0+1) - \frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{2}\right) - 1\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right)$$

$(\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IK}) \cdot \overrightarrow{IH} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = 0$ នោះបីវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{IH}$ ស្ថិត

នៅក្នុងប្លង់តែមួយ (វ៉ិចទ័រកូលីនេ)។

ដូចនេះបួនចំណុច H , I , J , K ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។

២.រកទីតាំងនៃចំណុច $P \in [DH]$ ដោយដឹងថា $\overrightarrow{PI} \cdot \overrightarrow{PJ}$ មានតម្លៃតូចបំផុត ៖

ដោយ $P \in [DH]$ នោះ $P(0,1,c)$ ដែល $0 < c < 1$ ។

គេមាន $\overrightarrow{PI} = (\frac{1}{2}, -1, 1-c)$ និង $\overrightarrow{PJ} = (1, -\frac{3}{4}, -c)$

យើងបាន $\overrightarrow{PI} \cdot \overrightarrow{PJ} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + c^2 - c = \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$ ។

ដើម្បីឲ្យ $\overrightarrow{PI} \cdot \overrightarrow{PJ}$ មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $c - \frac{1}{2} = 0$ ឬ $c = \frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះចំណុច P ស្ថិតនៅកណ្តាលនៃអង្កត់ $[DH]$ ទើប $\overrightarrow{PI} \cdot \overrightarrow{PJ}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៥

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសបន្ថែមសម្រាប់ការងារផ្ទះ

០១. នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(1, 2, 3)$, $B(5, 6, -4)$ និង $C(9, 1, 7)$ ។

ក. គណនា AB , AC និង BC ។

ខ. គណនាផលគុណស្កាលែន $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃ $\triangle ABC$ ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច P ដែល $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ។

ឃ. រកប្រភេទនៃចតុកោណ $PBAC$ ។

០២. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1, 4, -5)$, $B(-1, 6, -4)$, $C(3, -2, 4)$ និង $D(5, -4, 3)$ ។

ក. គណនា AB, AC, AD, BC, BD និង CD ។

ខ. ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

គ. គណនាផលគុណស្កាលែន $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ ។

ឃ. I ជាចំណុចកណ្តាល $[AD]$ និង J ជាចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I និង J រួចគណនា IJ ។

០៣. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(6, -3, -1)$, $B(1, -1, -5)$, $C(6, 9, 5)$ និង $D(10, 5, 7)$ ។

ក.គណនា AB, AC, AD, BC, BD និង CD ។

ខ.ចូរស្រាយថា $AD \parallel BC$ និង $DA \perp DC$ រួចទាញរកប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

គ.គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

ឃ. H ជាចំណោលកែងនៃ A លើ $[BC]$ ។ គណនា BH និង HC រួចរក កូអរដោនេនៃចំណុច H ។

០៤.ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(-5, 4, 3), B(1, 7, -3), C(7, -5, -3)$ និង $D(-9, 2, -2)$ ។

ក.គណនា AB, AC, AD, BC, BD និង CD ។

ខ.ស្រាយថាមុខខាងទាំងអស់នៃតេត្រាអែត $ABCD$ សុទ្ធតែជាត្រីកោណកែង

០៥.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច

$A(1, -1, -2), B(3, 1, -1), C(-1, 5, 2)$ និង $D(-3, 3, 2)$ ។

ក.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{DB}$ ។

ខ.គណនារង្វាស់ទ្រនុងទាំងអស់របស់តេត្រាអែត $ABCD$ ។

គ.គណនាផលគុណស្កាលែន $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ និង $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ ។

ឃ.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ។

០៦.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច

$A(-2, 2, -1), B(-1, -6, 3), C(2, 6, 6)$ និង $D(6, 1, -5)$ ។

ក.គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

ខ.គណនា $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

គ.ស្រាយថា BCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ឃ.រកកូអរដោនេនៃចំណុច E ដោយដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ ។

ង.ចូរស្រាយថា $(AE) \perp (BCD)$ ។

០៧.តម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right)$ គេឲ្យត្រីកោណ ABC

មានកំពូល $A(-1,1,5)$, $B(5,7,2)$ និង $C(3,-7,-3)$ ។

ក.គណនា AB, AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(AB), (AC)$ និង (BC) ។

គ.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដោយដឹងថា $BC \cdot \overrightarrow{IA} + AC \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ។

ឃ.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $BC \cdot IA^2 + AC \cdot IB^2 + AB \cdot IC^2 = BC \cdot AC \cdot AB$ ។

ង.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA), (IB), (IC)$ ។

ច.ចំពោះគ្រប់ចំណុច X នៃលំហចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង ៖

$$BC \cdot XA^2 + AC \cdot XB^2 + AB \cdot XC^2 = (BC + AC + AB) XI^2 + BC \cdot AC \cdot AB$$

០៨.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right)$ គេឲ្យពីរចំណុច

$$A(2,-5,4) \text{ និង } B(-2,7,-2)$$

- ក.គណនាកូអរដោនេ I កណ្តាលអង្កត់ $[AB]$ រួចគណនាប្រវែង AB ។
- ខ.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ី(S) មានអង្កត់ផ្ចិត AB ។
- គ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AB)និងសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ $[AB]$ ។
- ឃ.គេឲ្យចំណុច $C(3, -1, 7)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $C \in (S)$ រួចសរសេរសមីការនៃប្លង់(P) ប៉ះនឹងស្វ៊ី(S) ត្រង់ចំណុច C ។
- ង. D ជាចំណុចមួយដែល $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{CB}$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច D រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $CADB$ ។
- ០៩.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right)$ គេឲ្យប្លង់ $(P): 2x + y - 2z + 6 = 0$ និងចំណុច $A(4, -1, 2)$ ។
- ១.គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់(P) ។
២. H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A លើប្លង់(P) ។គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ី(S)មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាម A ។
៣. B ជាចំណុចមានអរដោនេ $y_b = 0$ ហើយ $B \in (P)$ និង $B \in (S)$ ។ ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B ។
- ៤.គេឲ្យចំណុច $D(4, -4, 5)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $D \in (P)$ និង $D \in (S)$ ។ ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ប៉ះនឹងស្វ៊ី(S) ត្រង់ចំណុច D

ដោយដឹងថា $(L) \subset (P)$ ។

១០. នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

$$\text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិក}(L): \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 8 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{និងប្លង់}(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$$

ក. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

ខ. គេឲ្យ $B(2, 3, 4)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B \in (P)$ ។

គ. ពីចំណុច B គេគូសបន្ទាត់ (BH) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ដោយ $H \in (L)$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិកនៃបន្ទាត់ (BH) ។

ឃ. គេយក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I រួច

ទាញបង្ហាញថា $\overline{IH}$ ជារ៉ឺឌ័រទីនៃនរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។

ង. K ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច H ធៀបនឹងប្លង់ (P) ។ គណនាកូអរដោនេនៃ K

រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាចតុកោណ $AHBK$ ជាការេ។

១១. នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច

$A(1, 1, 5), B(4, -2, 5), C(-2, 1, -1)$ និង $D(-5, 4, -1)$ ។

ក. គណនា $\overline{AD}$ និង $\overline{BC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រិកនៃបន្ទាត់ (BC) និង (CD) ។

គ. H ជាចំណោលកែងនៃ A លើ BC ហើយ K ជាចំណោលកែងនៃ H លើ CD ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K ។

ឃ. គណនា AH និង BC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $ABCD$ ។

ង.ចូរស្រាយថា KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាត។

ច.រកកូអរដោនេនៃចំណុច L ដោយដឹងថា $HKCL$ ជាការេ។

១២.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច $A(-1, 2, 7), B(-5, -6, -1), C(2, -1, -5)$ និង $D(5, 5, 1)$ ។

ក.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ និង $\overline{AD}$ រួចគណនា

រង្វាស់នៃជ្រុងនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

ខ.ចូរបង្ហាញថា $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ និង $\overline{AB} // \overline{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

គ.តាង E ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។ គណនា EC និង ED ។

ឃ.គណនា $\overline{AB} \times \overline{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC និង ACD ។

ង.រកសមីការនៃប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។

www.mathtoday.wordpress.com